

Introduction à l'analyse

Partiel 2 – 27 novembre 2015

Calculatrice et documents non autorisés

Durée : 2 heures

Exercice 1

Questions de cours

1. Soit $a \in]0, +\infty[$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la définition du nombre a^x .
2. Énoncer le théorème de l'intégration par parties.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{5}} x \cos(5x) dx$.

Exercice 2

On considère la fonction

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^{-\ln(x)}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x) = \exp[-(\ln(x))^2]$.
2. Calculer

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer la dérivée de f sur cet intervalle.
4. Déterminer, en utilisant les théorèmes du cours, les ensembles $f(]0, 1])$ et $f([1, +\infty[)$, puis en déduire l'ensemble $f(]0, +\infty[)$.

Exercice 3

On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

1. Étudier la fonction $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$: donner le domaine de définition, les calculs de limites et le tableau de variation de u .
2. En déduire l'ensemble de définition de f .
3. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x).$$

4. Déterminer l'ensemble de dérivabilité $D_{f'}$ de f puis montrer que pour tout $x \in D_{f'}$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)\sqrt{-x}}.$$

Exercice 4

Pour chaque intégrale suivante, on demande de justifier l'existence puis de la calculer.

1. $I_1 = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1} dx$.
2. $I_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} dx$.
3. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) \cos^2(x) dx$.