Année universitaire 2017/2018

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1^er^ semestre ☒ 2^ème^ semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence de Mathematiques et Informatique
Code du module : Libellé du module : Analyse 1
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1.

1. Soit (u_n) une suite réelle. Traduire avec les quantificateurs l'affirmation "$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$".
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et non majorée. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et bijective.
   (a) À quelle condition sur $y \in \mathbb{R}$ la fonction réciproque g^{-1} est-elle dérivable en y ?
   (b) Si cette condition est remplie, que vaut $(g^{-1})'(y)$?
   (c) Application : soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = x^2 + x^3$. Calculer la valeur de $(g^{-1})'(2)$.

Exercice 2. Soit la suite définie par

$$v_0 = 2, v_1 = 3$$

et pour tout $n \geqslant 2$, $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a $v_{n+1}^2 - v_n v_{n+2} = (-1)^{n+1}$, et $v_n > 0$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est croissante.
   (c) Justifier à l'aide de la question (a), que la suite (v_n) ne converge pas.
   (d) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a $v_n \geqslant n + 2$, puis en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \dfrac{v_n}{v_{n+1}}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{v_{n+2}v_{n+1}}$.
   (b) Vérifier que les deux sous suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (c) En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 3.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Pour tout $x \in]1, +\infty[$, on pose $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{x-1}\right) + \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right) + \arctan(2x^2)$.
   (a) On pose $u(x) = \dfrac{x}{x-1}$ et $v(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Calculer $u'(x)$ et $v'(x)$.
   (b) Pour tout $c \in]1, +\infty[$, calculer $f'(c)$.
   (c) Déduire du théorème des accroissements finis, que pour tous $x, y \in]1, +\infty[$, on a $f(x) = f(y)$.
   (d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire, pour tout $y > 1$, la valeur de $f(y)$.

Exercice 4.

1. (a) Donner le développement limité à l'ordre 4, en 0, de la fonction $x \mapsto \cos x$.
   (b) Donner le développement limité à l'ordre 2, en 0, de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
   (c) Donner le développement limité à l'ordre 4, en 0, de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.
2. Déduire, de la question 1.(a), le développement limité à l'ordre 4, en 0, de la fonction $\cos(1 - \cos x)$.
3. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$.