

Analyse 1
Planche 1 - Suites numériques

1 Propriétés - Suites monotones

EXERCICE 1

Soient les suites définies, pour tout $n \geq 1$, par $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.

1. Vérifier qu'elles sont bornées.
2. Vérifier que la suite quotient $(u_n/v_n)_n$ n'est pas bornée.

EXERCICE 2 ♣

Écrire avec les quantificateurs la définition d'une suite divergente.

EXERCICE 3

Montrer qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang.

EXERCICE 4 ♣

Montrer que toute suite convergente est bornée.

EXERCICE 5 ♣

Montrer que si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de premier terme a et de raison r , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a + nr$.

EXERCICE 6 ♣

Montrer que si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de premier terme a et de raison r , alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = ar^n$.

EXERCICE 7

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de premier terme a et de raison $r \neq 1$. On suppose que a et r sont strictement positifs.

1. Montrer que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(\ln(u_n))$ est une suite arithmétique de premier terme $\ln(u_1)$ et de raison $\ln(r)$.

EXERCICE 8 ♣

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ n'est pas convergente.

EXERCICE 9

1. Écrire avec les quantificateurs que la suite (u_n) vérifie $\lim u_n = +\infty$.
2. En déduire que si (u_n) est une suite réelle qui tend vers $+\infty$ et (v_n) est une suite bornée, alors leur somme est une suite qui tend vers $+\infty$.

EXERCICE 10

Montrer que si une suite (u_n) est convergente alors la suite $(|u_n|)$ est convergente. La réciproque est-elle vraie ?

EXERCICE 11

Montrer que la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.

EXERCICE 12 ♣

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ en appliquant la définition de la convergence et en précisant N_ε qui intervient dans cette définition.

EXERCICE 13

Les suites suivantes, sont-elles monotones ? bornées ? convergentes ?

$$(i) a_n = n^{(-1)^n}, \quad (ii) b_n = \cos \frac{n\pi}{2}, \quad (iii) c_n = \sin \frac{n\pi}{2}, \quad (iv) d_n = \cos \frac{\pi}{n},$$
$$(v) e_n = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 - 3}, \quad (vi) f_n = \frac{n}{2^n}, \quad (vii) g_n = \frac{2^n}{n!}, \quad (viii) h_n = \frac{n!}{n^n}.$$

EXERCICE 14 ♣

A partir de la définition de la limite d'une suite, démontrer les égalités suivantes :

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2, \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(\ln n) = +\infty.$$

EXERCICE 15

Les suites suivantes sont-elles convergentes ?

$$(i) a_n = (-1)^n n, \quad (ii) b_n = 1 + \frac{n}{n+1} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad (iii) c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{(-1)^n}.$$

EXERCICE 16

1. Montrer que si la suite $(a_n)_n$ est bornée et si la suite $(b_n)_n$ vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.
2. Calculer les limites suivantes :

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} \sin(3n + 1), \quad (ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^3 + 1} \cos(n!), \quad (iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{n+1} - \sin \sqrt{n}).$$

EXERCICE 17

1. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |l|$.
2. Montrer que si $a_n \neq 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

EXERCICE 18 ♣

1. Soit (a_n) une suite à termes non nuls et telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q$. Montrer que si $q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
2. Calculer les limites des suites suivantes :

$$(i) a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad (ii) b_n = \frac{2^{n!}}{n^n}, \quad (iii) c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Pour la (ii), on pourra admettre que l'inégalité

$$1 + x \geq (2,2)^x$$

est vraie pour tout $x \in [0, 1/3]$.

EXERCICE 19

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \frac{n}{n^2 + 3} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_n$.

EXERCICE 20

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{\sin(1)}{n^2} + \frac{\sin(2)}{n^2} + \frac{\sin(3)}{n^2} + \dots + \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

En encadrant u_n , démontrer que la suite $(u_n)_n$ converge.

EXERCICE 21 (La constante d'Apéry)

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_n$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.
3. Justifier que la suite $(u_n)_n$ converge. Que peut-on dire de sa limite ?

EXERCICE 22 ♣

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Démontrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.
2. En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite.
3. En calculant u_{10} et v_{10} donner un encadrement de la limite commune de ces deux suites.

2 Calculs de limites

EXERCICE 23 ♣

Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer u_n . En déduire que l'on a $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

EXERCICE 24 ♣

Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $-1 ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{3} ; \dots ; \frac{(-1)^n}{n} ; \dots$

2. $3/1 ; 6/4 ; 9/7 ; \dots ; 3n/(3n-2) ; \dots$

3. $0,31 ; 0,311 ; \dots ; 0,311 \cdots 1 ; \dots$

4. $\frac{(n+3)(n+4)}{n^3}$

5. $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$

6. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{n^4}$

7. $\left[\frac{1+3+5+\dots+(2n+1)}{n+1} - \frac{2n-1}{2} \right]$

8. $\frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$

9. $\frac{4^{n+1} + 3^{n+1}}{4^n + 3^n}$

10. $(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n)$ puis $2\sqrt{2} ; 2\sqrt{2\sqrt{2}} ; 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} ; \dots$

11. $\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$

12. $(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})$

13. $\frac{n^2 \sin(e^n)}{n + n^3}$

14. Démontrer la formule $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$.

EXERCICE 25

Calculer les limites suivantes :

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$, (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$, (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$, (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \cos n}{3n + \sin n}$,

(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^{n+1} + 2 \cdot 4^n}{5 \cdot 2^n + 4^{n+2}}$, (vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$, (vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{n^2}$,

(viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$, (ix) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$.

EXERCICE 26

Calculer les limites des suites suivantes :

(i) $a_n = n - \sqrt{n^2 + 5n}$, (ii) $b_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$, (iii) $c_n = \sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt{n^4 - n^2}$,

(iv) $d_n = \frac{\sqrt{n^2+5} - n}{\sqrt{n^2+2} - n}$, (v) $e_n = \frac{\sqrt{n^2 + \sqrt{n+1}} - \sqrt{n^2 - \sqrt{n-1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$, (vi) $f_n = \sqrt[3]{n(n+1)^2} - \sqrt[3]{n(n-1)^2}$,

(vii) $g_n = \frac{n}{\sqrt[3]{8n^3 - n} - n}$, (viii) $h_n = n(\sqrt[3]{n^3 + n} - n)$.

EXERCICE 27

Calculer les limites des suites suivantes en appliquant le théorème des gendarmes :

$$(i) a_n = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n + 4 \cdot 7^n}, \quad (ii) b_n = \sqrt[n]{3n + \sin n}, \quad (iii) c_n = \sqrt[n]{2n + \frac{(-1)^n}{n}}, \quad (iv) d_n = \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 4^n}},$$

$$(v) e_n = \sqrt[n]{2n^3 - 3n^2 + 15}, \quad (vi) f_n = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}, \quad (vii) g_n = \sqrt[n]{1^k + 2^k + \dots + n^k}.$$

3 Suites extraites. Valeurs d'adhérence. Limite sup, limite inf.**EXERCICE 28 ♣**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R} . Que pensez-vous des propositions suivantes :

1. Si $(u_n)_n$ converge vers un réel l alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l .
2. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
3. Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite l , il en est de même de $(u_n)_n$.

EXERCICE 29

Soit q un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \frac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+q} = u_n$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1} . En déduire que la suite u_n n'a pas de limite.

EXERCICE 30 ♣ (Calcul des valeurs d'adhérence d'une suite)

1. Calculer les valeurs d'adhérence, la limite inf et la limite sup de la suite $(u_n)_n$ définie par
 - (a) $u_n = 5 + \frac{\sqrt{n} \sin(n)}{2n^2} + (-1)^{n^2+1}$.
 - (b) $u_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n})$.
 - (c) $u_n = \cos(\frac{n\pi}{3})$. Comparer l'ensemble des termes (valeurs) de cette suite avec l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.
 - (d) $u_n = \frac{7n}{11} - E(\frac{7n}{11})$. Comparer l'ensemble des termes (valeurs) de cette suite avec l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.
2. Introduire la notion de valeur d'adhérence pour une suite dans \mathbb{C} . Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite complexe (z_n) définie par
 - (a) $z_n = i^n + (\frac{1+i}{2})^n + (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{3n+1}$
 - (b) $z_n = (\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^n + n(-1 + i^n) + \frac{1}{n^2}$.

EXERCICE 31

Soit $(u_n)_n$ est une suite réelle croissante qui admet une suite extraite majorée. Montrer que $(u_n)_n$ est majorée (donc convergente).

EXERCICE 32 ♣

En utilisant des suites extraites, établir la divergence des suites suivantes : $u_n = n^{-1+(-1)^n}$, $v_n = \cos(\pi\sqrt{n})$, $w_n = \sqrt{n} - E(\sqrt{n})$

EXERCICE 33 ♣

Montrer qu'une suite de nombres réels $(u_n)_n$ est non majorée si et seulement si $(u_n)_n$ admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 34

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels telle que les suites extraites $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge.

EXERCICE 35

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ les suites définies par $u_n = \frac{n+1}{n} \cos(\frac{n\pi}{2})$ et $v_n = \frac{n-1}{n} \sin(\frac{n\pi}{2})$. Calculer les limites supérieures et inférieures des suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(u_n + v_n)_n$.

EXERCICE 36

Déterminer les limites supérieures et inférieures des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ et

$$v_n = \begin{cases} (1 + \frac{1+(-1)^p}{p})^p & \text{si } n = 2p \\ (1 + \frac{1}{p})^p & \text{si } n = 2p + 1. \end{cases}$$

EXERCICE 37

Montrer que pour toutes suites réelles bornées $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n) + \limsup_{n \rightarrow \infty} (v_n).$$

Est-ce que cette inégalité reste vraie pour les suites non-bornées? Attention au cas $\limsup_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \infty$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$.

EXERCICE 38

- Soit (u_n) une suite convergente de \mathbb{R} et soit l sa limite.
 - Montrer que si $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n < l\}$ est infini, alors $(u_n)_n$ admet une suite extraite strictement croissante.
 - Montrer que si $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > l\}$ est infini, alors $(u_n)_n$ admet une suite extraite strictement décroissante.
 - Que peut-on dire de la suite (u_n) si les deux ensembles $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n < l\}$ et $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > l\}$ sont finis?
- Montrer que toute suite dans \mathbb{R} admet une suite extraite monotone.
- Soit (u_n) une suite dans \mathbb{R} . Montrer que toute valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ est la limite d'une suite extraite monotone.

EXERCICE 39

Déterminer les limites inférieures et supérieures de la suite $(u_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_1 = 0$, $u_{2n} = \frac{u_{2n-1}}{2}$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2} + u_{2n}$.

EXERCICE 40 (L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite bornée)

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée et $(v_n)_n$ une suite convergente dont tous les termes sont des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ est aussi une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$.

EXERCICE 41

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites dans \mathbb{K} (où \mathbb{K} désigne l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Notons par A (respectivement B) l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$, respectivement $(v_n)_n$. En utilisant les suites $(u_n)_n, (v_n)_n$ construire une suite $(w_n)_n$ dont l'ensemble des valeurs d'adhérence soit $A \cup B$.

EXERCICE 42 (Suites bornées denses dans un intervalle)

Soit $a \in]0, \infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ posons $\varphi_a(x) := \min\{x - ka \mid k \in \mathbb{Z}, ka \leq x\} \in [0, a[$.

- Remarquer que pour $\varphi_1(x) = x - E(x)$, puis $\varphi_a(x) = a(\frac{x}{a} - E(\frac{x}{a}))$.
- Supposons que $a \in \mathbb{Q}$.
 - Montrer que l'ensemble V des valeurs de l'application $\mathbb{N} \rightarrow [0, a[$ définie par $n \mapsto \varphi_a(n)$ est fini. Préciser le cardinal de cet ensemble.
 - Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\varphi_a(n))_n$ est l'ensemble fini V .
 - Donner un exemple de suite bornée dans \mathbb{R} qui a exactement 2014 valeurs d'adhérence.
- Supposons que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - Montrer que l'application $\mathbb{N} \rightarrow [0, a[$ définie par $n \mapsto \varphi_a(n)$ est injective.
 - Montrer que la suite $(\varphi_a(n))_n$ admet une suite extraite convergente dans $[0, a[$.
 - Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 < |\varphi_a(m) - \varphi_a(n)| < \varepsilon$.
 - l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\varphi_a(n))_n$ est $[0, a[$.
- Préciser l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \sin(n)$.
- Préciser l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \tan(n)$.

EXERCICE 43 (Suite bornée telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$)

- Soit $(u_n)_n$ une suite bornée de \mathbb{R} telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ coïncide avec l'intervalle $\left[\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \right]$.
- Donner un exemple d'une suite bornée et divergente $(u_n)_n$ de \mathbb{R} telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

4 Suites récurrentes

EXERCICE 44 ♣

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par : $u_0 > 2$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

1. Montrer que $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On suppose que la suite $(u_n)_n$ converge. Quelle est sa limite l ?
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
4. En déduire la nature de la suite $(u_n)_n$ (convergente ou pas).

EXERCICE 45

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \arctan x$.

1. Montrer que f a un seul point fixe x_0 et préciser ce point.
2. Est-ce que f est une contraction ?
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite récurrente $(u_n)_n$ dans \mathbb{R} définie par $u_0 = x$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x_0 .

EXERCICE 46

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue et croissante.

1. Montrer que la suite récurrente définie par $u_0 = b$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, est décroissante.
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

EXERCICE 47 (Méthode de Héron)

Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

On se propose de montrer que $(u_n)_n$ tend vers \sqrt{a} .

1. Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

2. Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers \sqrt{a} .
4. En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$ montrer que

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-1}}.$$

6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

EXERCICE 48 (Variante de la méthode de Héron)

Soit $a > 0$. On définit la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ par v_0 un réel vérifiant $u_0 > \sqrt{a}$ et par la relation

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2v_n + \frac{a}{v_n} \right).$$

1. Montrer que

$$v_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{2}{3v_n} (v_n - \sqrt{a}) \left(v_n - \frac{\sqrt{a}}{2} \right).$$

2. En déduire que $v_n > \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 0$.
3. Montrer que $(v_n)_n$ est décroissante.
4. En déduire que la suite $(v_n)_n$ converge vers \sqrt{a} .
5. Soit $n \geq 0$. Donner une majoration de $v_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $v_n - \sqrt{a}$.
6. En déduire que

$$v_n - \sqrt{a} \leq (v_0 - \sqrt{a}) \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

7. Application avec la calculatrice : calculer $\sqrt{8}$ avec une précision de 5 chiffres après la virgule, en prenant $v_0 = 3$.

EXERCICE 49

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sin(x)$.

1. Faites le graphe de f ,
2. Montrer que $f([0, \pi]) = [0, \pi]$.
3. Préciser l'ensemble des points fixes de f .
4. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ on a $x \leq f(x) \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ et pour tout $x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ on a $x \geq f(x) \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite récurrente $(u_n(x))$ associée à f de terme initial $u_0(x) = x$ est convergente.
6. Étudier l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$F(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x).$$

EXERCICE 50

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. On définit les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par $u_0 = a$, $v_0 = b$, et pour tout entier $n \geq 0$ les relations $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + v_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres u_n et v_n sont positifs et inférieurs au $\max(a, b)$.
2. Établir une relation simple entre $u_{n+1} - v_{n+1}$ et $u_n - v_n$, et en déduire l'expression de $u_n - v_n$ en fonction de n .
3. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont une limite commune l .
4. Étudier la suite $(u_n + 2v_n)_n$ et en déduire la valeur de l .

EXERCICE 51

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour $n \geq 0$

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

1. Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent et ont la même limite l que l'on calculera en fonction de a et de b .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(a_n + b_n)}.$$

En déduire que pour tout $n \geq 0$ on a $0 \leq (b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{(b_n - a_n)^2}{4a}$ et $(b_n - a_n) \leq 4a \left(\frac{b-a}{4a}\right)^{2^n}$.

3. Application : trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.
4. Pour $a_0 = 3$, $b_0 = 5$ calculer les valeurs exactes de a_2 et b_2 et en déduire un encadrement de $\sqrt{15}$ par deux rationnels.

EXERCICE 52

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0,5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \frac{1}{n+2}e^{u_n}$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < u_n \leq 1$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} \leq \frac{1}{(n+2)}$, puis la convergence de $(u_n)_n$.

EXERCICE 53

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = 2 - e^{-u_n}$. Démontrer par récurrence que $(u_n)_n$ est positive et décroissante. Conclure...

EXERCICE 54 ♣ (Récurrences d'ordre 2)

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et (u_n) une suite dans \mathbb{R} satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence est $r^2 - ar - b = 0$.

1. Montrer que :
 - (a) La suite $(u_n)_n$ est déterminée par les deux premiers termes u_0, u_1 .
 - (b) Si l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2 , alors le terme général de la suite $(u_n)_n$ est donné par $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$, où λ, μ sont des constantes réelles.
 - (c) Si r_0 est une racine double de l'équation caractéristique, alors le terme général de la suite $(u_n)_n$ est donné par $u_n = (\lambda + \mu n)r_0^n$, où λ, μ sont des constantes réelles.
 - (d) Si l'équation caractéristique a deux racines complexes $r_1 = \rho e^{i\theta}$, $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ alors le terme général de la suite $(u_n)_n$ est donné par $u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$, où λ, μ sont des constantes réelles.

- Dans chaque cas déterminer les constantes λ, μ en fonction de u_0, u_1 . *Indication : Si l'équation caractéristique a deux racines complexes et $\rho = 1$, utiliser l'exercice ??.*
- Dans chaque cas étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.
- Application : Soit $(u_n)_n$ une suite de Fibonacci, donc une suite qui satisfait la relation récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Donner la formule du terme général en fonction des termes initiaux u_0, u_1 . Pour quelles paires $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ la suite de Fibonacci associée est convergente ?

EXERCICE 55

On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

- Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possibles de $(u_n)_n$?
- On suppose de plus que $u_0 \leq 0,25$. Montrer que $u_n \in [0; 0,25]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $(u_n)_n$ est croissante. Conclure.
- On suppose cette fois que $u_0 \in [0,25; 0,75]$. Montrer que $(u_n)_n$ est décroissante et minorée. Conclure.
- On suppose cette fois que $u_0 > 0,75$. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante. Conclure.

EXERCICE 56

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

- Montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f . Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_n$? Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $[1, 3]$?
- Montrer que la suite (u_{2n}) est croissante et que la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
- En déduire que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
- Quelle est la nature de la suite $(u_n)_n$?

EXERCICE 57 ♣ (suite arithmético-géométrique)

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- Quelle est la seule limite possible l de la suite $(u_n)_n$?
- Soit $(v_n)_n$ la suite définie par $v_n = u_n - l$. Démontrer que $(v_n)_n$ est géométrique. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_n$.

EXERCICE 58

Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, supposée continue et monotone, et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a, b] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

- On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
- Application :

$$u_0 = 4 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$

- On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
- Application : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.
Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

5 Suites de Cauchy

EXERCICE 59

Soit $(u_n)_n$ une suite dans \mathbb{R} telle que la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} |u_{k+1} - u_k|$ est bornée. Montrer que $(v_n)_n$ et $(u_n)_n$ sont convergentes.

EXERCICE 60

Montrer en utilisant le critère de Cauchy que la suite $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ est divergente.

EXERCICE 61

On considère une suite de nombres réels $(u_n)_n$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}|$. Montrer à l'aide du critère de Cauchy que $(u_n)_n$ est convergente lorsque $k \in [0, 1[$.

EXERCICE 62

1. Démontrer par récurrence sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}.$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ donnée par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est une suite de Cauchy.

EXERCICE 63

Montrer, en utilisant la définition, que

- la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$ n'est pas de Cauchy.
- la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$ est de Cauchy.

EXERCICE 64

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ à valeurs rationnelles converge vers x . En déduire que tout nombre réel (en particulier tout nombre irrationnel) est la limite d'une suite de Cauchy à valeurs dans \mathbb{Q} . Qu'est-ce qu'on peut dire de la suite $(u_n)_n$ lorsque

- x est un nombre décimal (donc un nombre possédant un développement décimal limité)?
- $x \in \mathbb{Q}$?

EXERCICE 65

Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2 + \frac{1}{k})^k}$$

est de Cauchy.

6 Exercices complémentaires

EXERCICE 66

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels qui vérifie :

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge vers 0.

EXERCICE 67

Calculer, suivant les valeurs de x , la limite des suites $(u_n)_n$, $u_n = (\cos(x))^n$, $x \in \mathbb{R}$, et $(v_n)_n$, $v_n = \cos(n!\pi x)$, $x \in \mathbb{Q}$.

EXERCICE 68

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Une telle suite possède la propriété P1 (resp. P2) s'il existe un indice h (resp. k) tel que $u_h = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ (resp. $u_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).

Montrer que si la suite $(u_n)_n$ est convergente, elle possède au moins l'une des propriétés P1 ou P2. Donner un exemple de suite convergente qui possède les deux propriétés P1 et P2.

EXERCICE 69 ♣ (Le nombre e comme limite d'une suite)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite dans \mathbb{R} définie par $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Montrer que :

- $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} (1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!} (1 - \frac{1}{n}) (1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!} [(1 - \frac{1}{n}) (1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n})]$.
- La suite $(x_n)_n$ est croissante,
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $x_n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$
- La suite $(x_n)_n$ est bornée par 3.
- La suite $(x_n)_n$ est convergente. Soit ℓ la limite de cette suite.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\ell \geq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.
- La suite $(s_n)_n$ de terme général $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est convergente et $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.
- $\ell = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}$ au sens des limites de fonctions.

9. $\ell = e$.

10. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

EXERCICE 70

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+2} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. Montrer que $(u_n)_n$ converge. *Indication* : On pourra commencer par étudier la monotonie de la suite de terme général $v_n := \max(u_{n+1}, u_n)$.

EXERCICE 71

Soit $(u_n)_n$ une suite bornée telle que, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} + u_{n+1})$. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge. *Indication* : étudier d'abord la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - u_{n-1}$.

EXERCICE 72 (Théorème de Cesaro)

1. Montrer que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ , elle converge aussi en moyenne arithmétique vers ℓ , c'est-à-dire que la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ converge aussi vers ℓ . *Indication* : Traiter d'abord le cas $\ell = 0$ puis s'y ramener en considérant la suite $(v_n)_n$ de terme général $v_n = u_n - \ell$.
2. La réciproque est-elle vraie ? Donner un exemple.
3. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ (où $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$), alors la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ a la même propriété.
4. Soit $(u_n)_n$ une suite monotone. Montrer que $(u_n)_n$ converge vers ℓ si et seulement si la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ converge vers ℓ .

EXERCICE 73

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de \mathbb{R}_+^* qui converge vers ℓ . Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 \dots u_n} = \ell$. *Indication* : Réduire le problème au théorème de Cesaro en utilisant la fonction \ln . Attention au cas $\ell = 0$. Est-ce que le résultat reste vrai si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$?

EXERCICE 74 (Théorème des intervalles emboîtés)

Soit $(I_n)_n$ une suite d'intervalles fermés $I_n = [a_n, b_n]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_{n+1} \subset I_n$.

1. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.
2. Quelle condition doivent satisfaire les suites $(a_n)_n, (b_n)_n$ pour que l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$ ait un seul élément ?
3. Est-ce que le théorème similaire est vrai dans \mathbb{Q} (donc si on remplace les intervalles fermés de nombres réels par des intervalles fermés de nombres rationnels) ?