Année universitaire 2017/2018

Site : ☒ Luminy ☒ St-Charles ☐ St-Jérôme ☐ Cht-Gombert ☒ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☒ 2ème semestre ☐ Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence de Mathematiques et Informatique
Code du module : Libellé du module : Analyse 1
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Les réponses aux questions devront être justifiées avec soin à partir des résultats et définitions du cours et on évaluera la précision et la clarté de la rédaction.

Exercice 1.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. Montrer que si $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = +\infty$ alors la suite $(u_n)_n$ est minorée.
2. (a) Soit $(v_n)_n$ une suite de nombres réels convergeant vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Montrer qu'alors la suite $(|v_n|)_n$ converge vers $|l|$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. En utilisant la définition, montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} e^{n^3+n^2+1} = +\infty$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2+1}.$$

1. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
3. La suite $(u_n)_n$ est-elle convergente ? Si oui, vers quelle limite ?

Exercice 4.

1. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \frac{n^6+2n^4+n^2}{n^2+1} - n^3\sqrt{n^2+2}.$$

2. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(rk+s)$ pour $r, s \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer alors que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ par

$$v_n = \frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{n+1} - \frac{1+n+3n^2}{2n}$$

   est convergente.

Exercice 5. Soient a et b des nombres réels, tels que $0 < a < b$. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ les suites définies par récurrence de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_0 = a \;;\; b_0 = b \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n+b_n} \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n+b_n} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n + b_n > 0$. Vérifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.

2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ est géométrique. En déduire l'expression de v_n, la valeur de $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$, puis celle de $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} e^{v_n}$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par $u_n = a_n - b_n$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, égale à une valeur à préciser.
   (b) En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $e^{v_n} = 1 + \dfrac{a-b}{b_n}$.
4. Déduire des questions précédentes que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et donner leurs limites.