Chapitre 2 : Limites et fonctions continues

1 Rappels sur les fonctions

1.1 Opérations sur les fonctions

Définitions *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. On peut alors définir les fonctions suivantes :*

. *la somme de f et g est la fonction $f + g : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(f+g)(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

. *le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(f \times g)(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

. *la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda f : U \to \mathbb{R}$ définie par*

$$(\lambda f)(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définitions *Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de $\mathbb{R}$. Alors :*

. *$f \geqslant g$ si* . . . .

. *$f \geqslant 0$ si* . . . .

. *$f > 0$ si* . . . .

. *f est dite constante sur U si :* . . . .

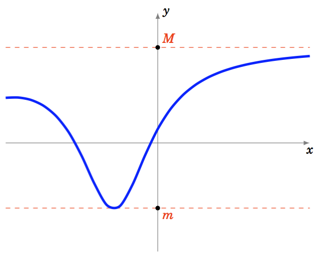
. *f est nulle sur U si* . . . .

. *f est <u>majorée</u> si* . . . .

. *f est <u>minorée</u> si* . . . .

. *f est <u>bornée</u> si* . . . .

(ou de façon équivalente . . . . *)*



1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

Définitions *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie U de $\mathbb{R}$. On dit que :*

. *f est croissante sur U si* ....

. *f est strictement croissante sur U si* ....

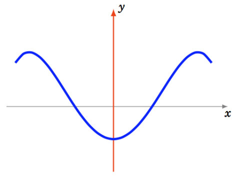
. *f est décroissante sur U si* ....

. *f est strictement décroissante sur U si* ....

. *f est monotone sur U si f est croissante ou décroissante sur U.*
. *f est strictement monotone sur U si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur U.*

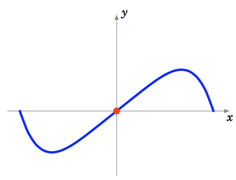
1.4 Parité et périodicité

Définitions *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est à dire de la forme $[-a, a]$ ou $]-a, a[$ ou $\mathbb{R}$) et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :*



. *f est paire si* ....

Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

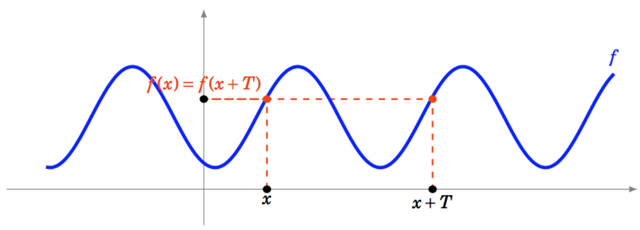


. *f est impaire si* ....

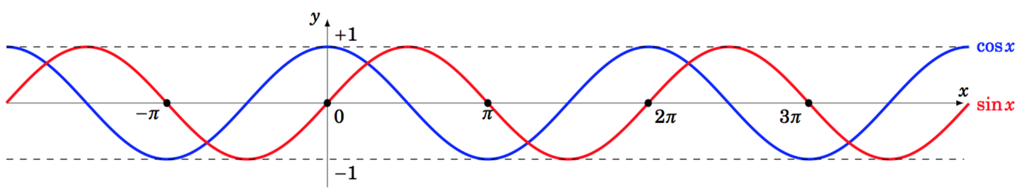
Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine $(0, 0)$.

Exemple *La fonction carré $x \mapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$ alors que la fonction cube $x \mapsto x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$.*

Définition *Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et un réel $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T si* ....



Exemple *Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :*



2 Limites

2.1 Définitions

2.1.1 Limite en un point

Définition *Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$. Pour tout sous ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{V}$ est un* <u>*voisinage de x_0*</u>*(ce que l'on note $\mathcal{V} \in V_{x_0}$) s'il existe un intervalle de la forme $]a, b[$ (appelé intervalle ouvert) tel que* . . . .

. . . .

Exemples $\mathcal{V} =]x_0 - 1, x_0 + 1[$ *est un voisinage de x_0. De même, $\forall \delta > 0$, $\mathcal{W}_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ est aussi un voisinage de x_0.*

Définition *Pour tout sous-ensemble D de $\mathbb{R}$, on dit qu'un réel x_0 est* <u>*adhérent à D*</u> *(ce que l'on note $x_0 \in \overline{D}$) si* . . . .

. . . .

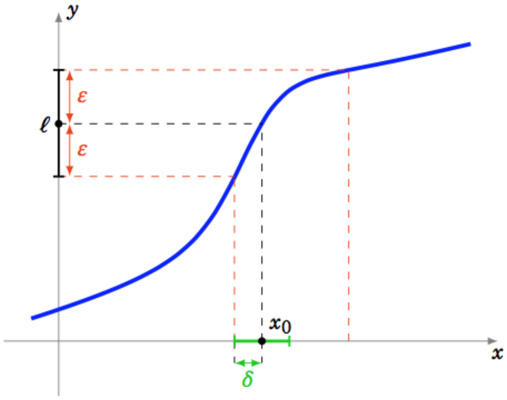
. . . .

. . . .

. . . .

Définition *Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overline{I}$.*

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ a pour limite ℓ en x_0 si



. . . .

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0.
On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell$.

Remarques

1. *On a les équivalences suivantes :*

   . . . .

2. *Attention à l'ordre des quantificateurs très important : on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$ car le δ dépend en général du ϵ.*
3. *En terme de voisinages, la définition donne :* . . . .

   . . . .

Exemples

1. *Montrer que* $\lim_{x \to 2}(x+1) = 3$*. En reprenant les notations de la définition, on a* $f : \begin{array}{ccc} .... & \longrightarrow & .... \\ x & \longmapsto & .... \end{array}$,
   $x_0 = ...$ *et* $\ell = ...$ *Soit* $\epsilon > 0$*. Cherchons* $\delta > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}$,

   ....

   ....

   ....

   il suffit alors de choisir $\delta > 0$ *de sorte que*

   ....

   c'est à dire ...., on voit que $\delta = ...$ *convient.*

2. *Montrer que* $\lim_{x \to 4}\sqrt{x} = 2$*. En reprenant les notations de la définition, on a* $f : \begin{array}{ccc} .... & \longrightarrow & .... \\ x & \longmapsto & .... \end{array}$,
   $x_0 = ...$ *et* $\ell = ...$ *Soit* $\epsilon > 0$*. Cherchons* $\delta > 0$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

   ....

   ....

   ....

   Si .... *alors*

   ....

   il suffit alors de choisir $\delta > 0$ *de sorte que*

   ....

   c'est à dire

   ....

   ....

   Si .... *alors*

   ....

   il suffit alors de choisir $\delta > 0$ *de sorte que*

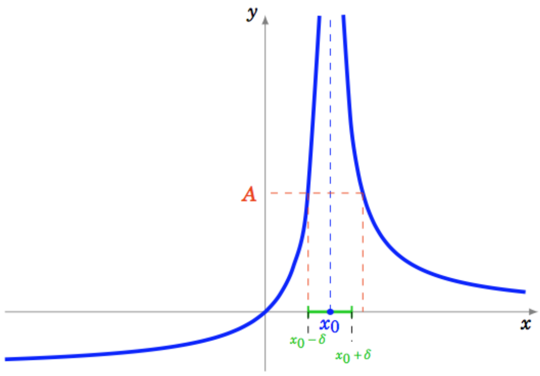
   ....

   c'est à dire

   ....

   ....

Définitions *Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{I}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*



— *On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0 si*

....

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$.

— *On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si*

....

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty$.

Exemple *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2}{(x-4)^2} = +\infty$. *Soit $A > 0$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que*

....

On a

....

il suffit de prendre $\delta = \ldots\ldots > 0$ et on a le résultat.

2.1.2 Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définitions

— *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si*

....

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

— *Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ si*

....

On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \ell$.

— *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si*

....

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

— *On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si*

....

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$.

— *On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si*

....

On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.

— *On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si*

....

On note alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ *ou encore* $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$.

Exemples

1. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x+1} = 0$ *avec* $I =]-1, +\infty[$. *Il faut montrer que*

   ....

   Soit $\epsilon > 0$*, il faut trouver un* $B > 0$*. On a pour* x *suffisamment grand : ....*

   ....

   On prend n'importe quel $B > 0$ *tel que* ....

   Remarque : *on aurait pu prendre* $B =$ .... *ou encore* $B =$ ....

2. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to -\infty} -3x + 4 = +\infty$ *avec* $I =]-\infty, 0[$. *Il faut montrer que*

   ....

   Soit $A > 0$*, il faut trouver un* $B > 0$*. On a*

   ....

   On prend n'importe quel $B > 0$ *tel que* ....

   Par exemple $B =$ .... *ou encore* $B =$ ....

2.1.3 Limite à gauche, limite à droite

Définitions *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction et* $x_0 \in \overline{I}$.

1. *On dit que* ℓ *est* ***limite à droite*** *en* x_0 *de* f *si*

   ....

   On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ *ou encore* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell$.

2. *On dit que* ℓ *est* ***limite à gauche*** *en* x_0 *de* f *si*

   ....

   On note alors $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ *ou encore* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell$.

Exemple *Montrer que* $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$*. La fonction est définie sur* $I =$ .... *Il faut montrer que*

....

Soit $A > 0$*, cherchons un tel* $\delta > 0$*. On a pour tout* $x > 1$

....

Il suffit de choisir $\delta > 0$ *tel que* ....

Proposition 2.1 *Si* f *admet pour limite* ℓ *en* x_0*, alors* ....
....

Remarque *On pourra utiliser la contraposée de ce résultat :* ....
....
....

Exemple *Montrer que la fonction* $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^*$ *n'admet pas de limite en* 0*. On a*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ldots\ldots\ldots \text{ et } \lim_{x \to 0^-} f(x) = \ldots\ldots\ldots$$

....
....

2.2 Propriétés

Proposition 2.2 *Si une fonction a une limite, alors cette limite est unique.*

Preuve. Similaire à celle pour montrer l'unicité de la limite d'une suite convergente. ∎

Proposition 2.3 *Soient f et g deux fonctions et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$. Alors*

- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to x_0} \lambda \times f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$*
- $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$
- $\lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = \dots\dots\dots$
- *Si $\ell \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dots\dots\dots$*
- *Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dots\dots\dots$*
- *Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dots\dots\dots$*

Preuve. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in \overline{I}$. Montrons que si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ est bien définie dans un voisinage de x_0 et $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\ell}$.
Sans perte, supposons que $\ell > 0$ (le cas $\ell < 0$ se traite de la même manière)............................

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Technique de calcul *Calcul de la limite* ***en l'infini*** *d'une fraction de polynômes : la limite est égale à la limite du rapport des termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur*

1. *Le degré du numérateur est plus élevé que celui du dénominateur :*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x^3-5}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
2. *Le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur :*
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+3x^3-5}{5x^4+2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4}{5x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$
3. *Le degré du dénominateur est plus élevé que celui du numérateur :*
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2+2x+1}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0^-.$$

RAPPEL : Soient $f : E \to F$ et $g : F' \to G$ deux applications telles que l'espace d'arrivée F de f soit inclus dans l'espace de départ F' de g. On définit alors l'**application composée** $g \circ f$ par
$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$

Proposition 2.4 *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *et* $\lim_{y\to\ell} g(y) = \ell'$ *alors* $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \ell'$*.*

Exemple *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}}$. *On a* $\lim_{x\to 0^+} \frac{5x+1}{x^2+3x} =$ .... *car* $5x+1 \xrightarrow[x\to 0^+]{}$ ..... *et* $x^2+3x \xrightarrow[x\to 0^+]{}$ ...... *Ainsi, comme* $\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} =$ .... *on en déduit que* $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}} =$ ....
2. $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right)$. *On a*
   $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2} =$...

   ....

   Comme $\lim_{x\to\dots\dots\dots} \ln(x) =$ ...., *on en déduit que* $\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right) =$ ....

Remarque *Comme pour les suites, il existe des cas où on peut rien dire sur les limites que l'on appelle formes indéterminées :*

....

Proposition 2.5

— ***Si*** $f \leqslant g$, ***si*** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ***et si*** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$ ***alors*** $\ell \leqslant \ell'$.

— ***Si*** $f \leqslant g$ ***et si*** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ***alors*** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

— ***Théorème des gendarmes :***

$$\textit{Si } f \leqslant g \leqslant h \textit{ et si } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R} \textit{ alors } \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell.$$

Exemples *Calculer les limites suivantes :*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x + 2} =$..

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 7x + 4} =$ ....

....

....

....

....

....

....

....

$2x^2 - x - 1 =$ .... ***et*** $3x^2 - 7x + 4 =$ ....

et alors $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 7x + 4} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\quad}{\quad} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\quad}{\quad} =$ ....

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 + x^2}}{x} =$..

....

....

....

....

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}\right)\rule{6cm}{0.4pt}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \rule{5cm}{0.4pt}$$

$$= \lim_{x\to 0} \rule{5cm}{0.4pt}$$

$$= \lim_{x\to 0} \rule{5cm}{0.4pt}$$

$$= \lim_{x\to 0} \rule{5cm}{0.4pt}$$

$$= \ldots\ldots$$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1} =$. . . . .

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)\rule{6cm}{0.4pt}}{}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \rule{5cm}{0.4pt}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \rule{5cm}{0.4pt}$$

$$= \ldots\ldots$$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} =$ *? La fonction cosinus n'a pas de limite en* $+\infty$ *en revanche elle est bornée :*

. . . .

. . . .

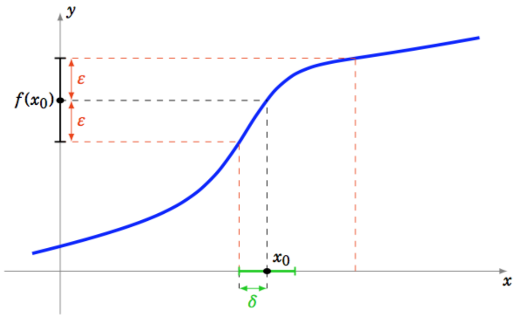
. . . .

3 Continuité en un point

3.1 Définitions

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définitions



— *On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si*

....

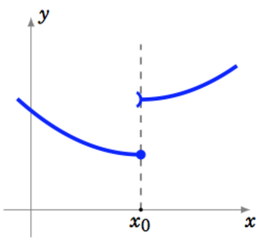
— *On dit que f est continue sur I si*

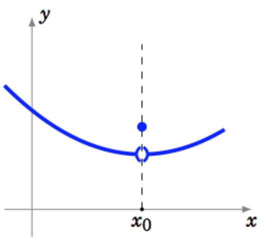
....

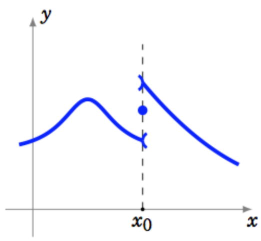
Remarques . *La continuité de f en un point x_0 signifie que si* ....

....

. Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est à dire si elle n'a pas de saut. Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :







Exemples

1. *La fonction $f : x \mapsto 4$ est continue sur $I = \mathbb{R}$. Fixons $x_0 \in I$ et écrivons la définition de la continuité en x_0 :*

   ....

   On a

   ....

   ....

   ....

2. *La fonction $g : x \mapsto |x|$ est continue sur $I = \mathbb{R}$. Fixons $x_0 \in I$ et écrivons la définition de la continuité en x_0 :*

   ....

   On a

   ....

....

....

....

....

....

....

....

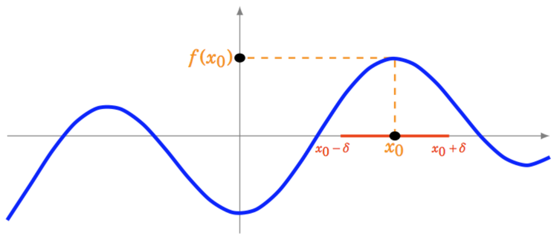
3.2 Propriétés

Proposition 3.4 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.* ....

....

....

....



Preuve. Supposons par exemple que $f(x_0) > 0$, le cas $f(x_0) < 0$ se traite de la même façon. En écrivant la définition de la continuité de f en x_0 pour $\epsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$ on obtient :

....

....

....

.... ■

Proposition 3.5 *(Opérations élémentaires)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et continues en un point x_0 de I. Alors

— *$\lambda.f$ est continue en x_0, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
— *$f + g$ est continue en x_0.*
— *$f \times g$ est continue en x_0.*
— *si $f(x_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{f}$ est continue en x_0.*

Proposition 3.1 *(Composition de fonction)*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur des intervalles I et J de $\mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$.

....

....

Exemple *On considère les fonctions* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2+1 \end{array}$ *et* $g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.

....

....

....

....

3.3 Prolongement par continuité

Définitions *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si*

   ....

2. *On définit alors la fonction $\tilde{f}: I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \text{...........} & \textit{si} \quad \text{................} \\ \text{...........} & \textit{si} \quad \text{................} \end{cases}$$

   ....

   ....

Exemple *La fonction* $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin(\frac{1}{x}) \end{array}$ *admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?*

....

....

....

....

....

....

....

3.4 Suites et continuité

Proposition 3.2 *Soient $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I. Alors*

f est continue en x_0 $\Leftrightarrow$ ....

....

Remarque ....

....

....

Définition *(Suite récurrente)*
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application. Toute suite définie par

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

est appelée <u>*suite récurrente*</u>.

Théorème 3.3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application continue sur I. Si la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

....

....

Remarque ....

....

....

Exemple *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
2. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.*
3. *En déduire qu'elle admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ et la calculer.*

....

....

....

....

....

....

....

....

Définition *(Point fixe)*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une application. ……

Exemple *On considère la fonction* $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$ ……

Définitions *(Applications lipschitziennes et contractantes)*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. ……

Proposition 3.4 *Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ (c'est à dire f et f' sont continues sur $[a, b]$).* ....
....

Exemple *On considère la fonction* $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Théorème 3.5 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, I un intervalle de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$ et $f : I \to I$ une application* ***contractante****. Alors*

1. *f admet un unique point fixe $\underline{\ell \in I}$.*
2. *Pour tout $u_0 \in I$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence*

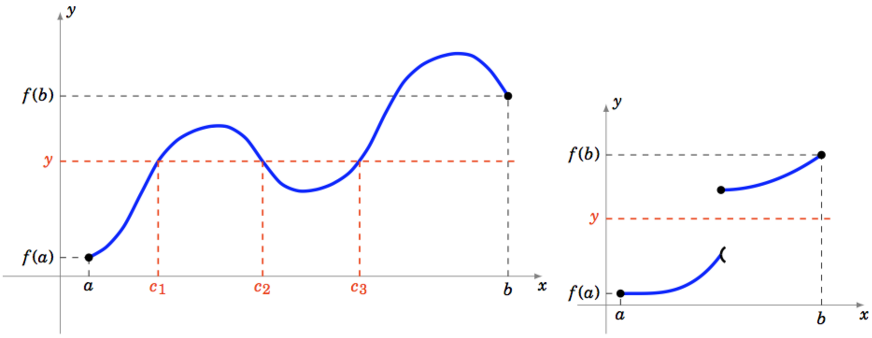
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

converge vers ℓ.

4 Le théorème des valeurs intermédiaires

Définition *Un segment est un intervalle fermé* $[a, b]$.

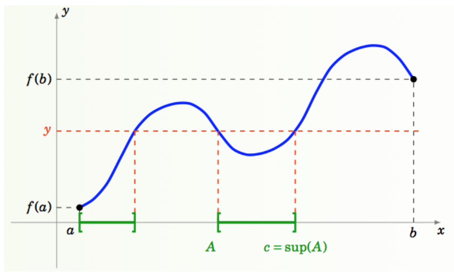
> **Théorème 4.1** *(Théorème des valeurs intermédiaires)*
>
> *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un segment.* ....
>
> ....



Preuve. Montrons le théorème dans le cas où $f(a) < f(b)$. Fixons $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ et montrons que y admet un antécédent par f.

1. On introduit l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leqslant y\}.$$



A est non vide (car $a \in A$) et il est majoré (car il est inclus dans $[a, b]$) : par théorème (voir *Chap. 1 Théorème 1.1*) il admet donc une borné supérieure que l'on note $c = \sup(A)$. Nous allons montrer que $f(c) = y$.

2. Montrons que $f(c) \leqslant y$. Comme $c = \sup(A)$, il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telle que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers c[2] ....

....

....

....

....

3. Montrons que $f(c) \geqslant y$. ....

....

....

....

....

2. c est dans l'adhérence de A car par caractérisation de la borne supérieure, tout voisinage de c rencontre A. Par définition de l'adhérence d'un ensemble, il existe donc une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} c$.

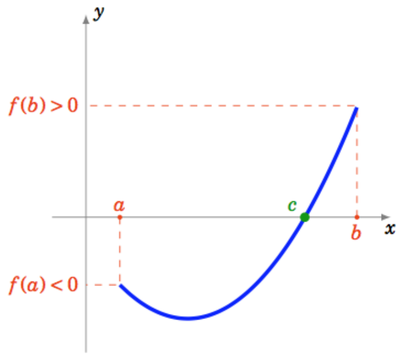
4. <u>Conclusion</u> : ....

■

Corollaire 4.2 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un segment.*

....

....



Exemple *Montrer que l'équation* $x^3 + 5x + 2 = 0$ *admet au moins une solution dans* $[-2, 2]$.

....

....

....

....

....

Corollaire 4.3 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle* I.

....

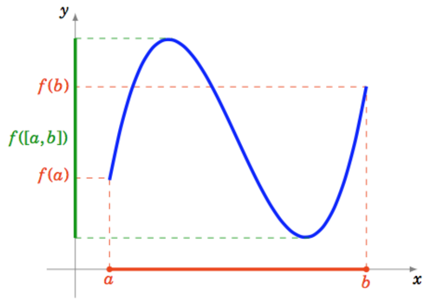
Remarque ....

....

....

....

....



Preuve. <u>*Rappel*</u> *: Soit* J *un sous ensemble de* $\mathbb{R}$. J *est un intervalle si et seulement si*

$$\forall x, y \in J,\ \forall a \in \mathbb{R},\ x < a < y \Rightarrow a \in J.$$

....

....

....

....

....

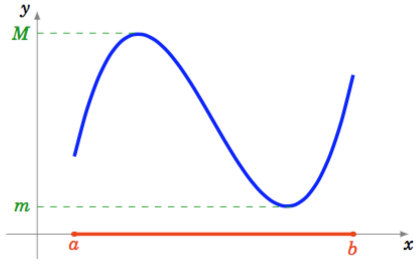
....

. . . . ■

Théorème 4.4 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors*

. . . .

Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.



Remarque *D'après le TVI, on sait déjà que $f([a, b])$ est un intervalle, le théorème précédent signifie donc que*

. . . .

. . . .

Donc m est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$ alors que M est le maximum.

Preuve. Montrons que f atteint ses bornes. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

5 Fonctions monotones et bijections

Définitions *Soit $f : E \to F$ une fonction où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.*

— *f est injective si $\forall x, x' \in E,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.*
— *f est surjective si $\forall y \in F,\ \exists x \in E : y = f(x)$.*
— *f est bijective si elle est injective et surjective c'est à dire si $\forall y \in F,\ \exists! x \in E : y = f(x)$.*

Proposition 5.2 *Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. La fonction g est appelée bijection réciproque de f et se note f^{-1}.*

Remarques

— *L'identité $Id_E : E \to E$ est simplement définie par $Id_E(x) = x, \forall x \in E$.*
— *$g \circ f = Id_E \Leftrightarrow \forall x \in E, g(f(x)) = x$.*
— *$f \circ g = Id_F \Leftrightarrow \forall y \in F, f(g(y)) = y$.*

Théorème 5.1 *(Théorème de la bijection)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I alors

1. ....
....

2. ....
....
....