Chapitre 1 : Les suites numériques

1 Quelques rappels

1.1 Bornes d'un ensemble

Définitions *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

. *Un réel M est un **majorant** de A si* ....

. *Un réel m est un **minorant** de A si* ....

. *Si un majorant de A existe,* ....

. *Si un minorant de A existe,* ....

. *Si A est majorée et minorée,* ....

Exemples
. 4 *est un* .... *de* $]0,2[$.
. $-7, 0$ *et* $-\pi$ *sont des* .... *de* $]0,+\infty[$ *mais il n'y a pas de* ....

Remarque *Par cet exemple, on voit qu'un ensemble n'admet pas toujours de minorant et ou de majorant, et de plus s'ils existent, il n'y a pas unicité.*

Définitions *Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

. *α est la **borne supérieure** de A si* ....
....

. *α est la **borne inférieure** de A si* ....
....

Exemples *Soient $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$.*
. $\sup]a,b[= \sup[a,b] =$ ....
. $\inf]a,b[= \inf[a,b] =$ ....
. $]b,+\infty[$ ....
. $]-\infty,a[$ ....

Théorème 1.1 ....

....

....

Proposition 1.2 *(Caractérisation de la borne supérieure)*
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. ....

....

1. ....
2. ....

Proposition 1.3 *(Caractérisation de la borne inférieure)*
Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. ....

....

1. ....
2. ....

Définitions *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
. *Un réel M est appelé* ***maximum*** *de A si* ....

....

. *Un réel m est appelé* ***minimum*** *de A si* ....

....

Remarque ....

....

Exemples *Soient $a, b \in \mathbb{R}, a \leqslant b$.*
. $\max[a,b] = \sup[a,b] =$ .....
. $\min[a,b] = \inf[a,b] =$ ......
. $]a,b[,\ ]a,+\infty[,\ ]-\infty,b[$ ....

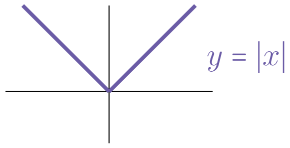
....

....

1.2 La valeur absolue

Définition *L'application **valeur absolue** notée* $|\,.\,|$ *est définie par :*

$$\begin{array}{rcl} |\,.\,| : \ldots\ldots & \to & \ldots\ldots \\ x & \mapsto & \begin{cases} \ldots\ldots & \textit{si} \quad x \geqslant 0 \\ \ldots\ldots & \textit{si} \quad x \leqslant 0. \end{cases} \end{array}$$



Proposition 1.4 *La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes* . . . .

1. $|x| \geqslant \ldots$
2. $|-x| = \ldots\ldots$
3. $|xy| = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
4. $\forall \epsilon \geqslant 0,\ |x| \leqslant \epsilon \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
5. ***La 1ère inégalité triangulaire*** *:* $|x+y| \leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
6. ***La 2nde inégalité triangulaire*** *:* $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leqslant |x-y|$.

1.3 La partie entière

Définition *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on appelle partie entière de* x*,* . . . .

. . . .

. . . .

Exemples
. $E(1) = \ldots\ldots$
. $E(n) = \ldots\ldots, \forall n \in \mathbb{Z}$.
. $E(\frac{3}{2}) = \ldots\ldots$
. $E(-\frac{3}{2}) = \ldots\ldots$

2 Suites numériques réelles

Définition *Une suite numérique réelle* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ . . . .

. . . .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$*, on note* $u(n)$ *par* u_n *et on l'appelle le terme d'indice* n *de la suite.*
On appelle aussi suite numérique réelle, toute application de $\mathbb{N}$ ***privé d'un nombre fini d'éléments*** *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *(<u>Exemple</u> : l'application* $u : n \mapsto \frac{1}{n-2}$*,* $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$ *est une suite).*

Définitions *(Suites particulières) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite*

. ***stationnaire*** *(ou constante) à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ si* . . . .

. . . .

. ***périodique*** *si* . . . .

où n_0 est appelée ...., *on dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est n_0-périodique.*

. ***arithmétique*** *si* . . . .

où r est appelée . . . .

. ***géométrique*** *si* . . . .

où q est appelée . . . .

Exemples

1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$u_n = \begin{cases} n+1 & \textbf{\textit{si}} \quad 0 \leqslant n < 10 \\ 4 & \textbf{\textit{si}} \quad n \geqslant 10, \end{cases}$$

. . . .

. . . .

2. *La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \cos(\pi n), n \in \mathbb{N}$ est* . . . .

. . . .

. . . .

3. *La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = 1 + 2n, n \in \mathbb{N}$ est* . . . .

. . . .

. . . .

4. *La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = 2 \times 5^n, n \in \mathbb{N}$ est* . . . .

. . . .

. . . .

Définitions *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite*

. ***majorée*** *si* . . . .

autrement dit, l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré.

. ***minorée*** *si* ....

autrement dit, l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ *est minoré.*

. ***bornée*** *si* ....

autrement dit, l'ensemble $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ *est borné.*

Exemples

1. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}$ ....

   ....

2. *La suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $v_n = 2n+3, n \in \mathbb{N}$. ....

   ....

3. *La suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $w_n = \cos(2n+1)$ ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Remarque *De façon équivalente, on peut aussi définir une suite bornée comme ceci :* ....

....

Définitions *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est :*

. ***croissante*** *si* ....

. ***strictement croissante*** *si* ....

. ***décroissante*** *si* ....

. ***strictement décroissante*** *si* ....

. ***monotone*** *si* ....

. ***strictement monotone*** *si* ....

....

Proposition 2.1 *(Critères de monotonie)*

- *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*
  - . *croissante si* ....
  - . *strictement croissante si* ....
  - . *décroissante si* ....
  - . *strictement décroissante si* ....
- *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à termes* ***strictement positifs*** *est*
  - . *croissante si* ....
  - . *strictement croissante si* ....
  - . *décroissante si* ....
  - . *strictement décroissante si* ....

Preuve. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et on va montrer qu'alors $\forall n, p \in \mathbb{N}, n \leqslant p \Rightarrow u_n \leqslant u_p$. Lorsque $n = p$ la propriété est vérifiée.
Lorsque $n \neq p$, si $n \leqslant p$ alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = n + k$. Montrons par récurrence sur k la propriété suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant u_{n+k} \quad (\mathcal{P}_k).$$

Lorsque $k = 1$, on a bien $u_n \leqslant u_{n+1}$ par hypothèse de l'énoncé.
Fixons $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $(\mathcal{P}_k)$ vérifiée et montrons que $(\mathcal{P}_{k+1})$ est également vraie :

$$\begin{aligned} u_{n+k+1} &= u_{(n+k)+1} \\ &\geqslant u_{n+k} \text{ (par hypothèse de l'énoncé } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n) \\ &\geqslant u_n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

ainsi, $(\mathcal{P}_{k+1})$ est vraie. Finalement, on a montré que
$\forall n, p \in \mathbb{N}, n < p \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* : p = n + k \Rightarrow u_n \leqslant u_{n+k} \Rightarrow u_n \leqslant u_p$. ■

Remarque ....

....

....

....

....

Exemples *Les suites suivantes sont-elles monotones, strictement monotones ou sans monotonie ?*

1. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = 2n+1, n \in \mathbb{N}$ ....

   ....

2. *La suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $v_n = \dfrac{3}{4^n}, n \in \mathbb{N}$ ....

   ....

   ....

3. *La suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $w_n = \cos(n\pi), n \in \mathbb{N}$ ....

   ....

   ....

   ....

4. *La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $x_n = 4, n \in \mathbb{N}$ ....

   ....

   ....

3 Limites de suites

Rappel : $\forall \epsilon \geqslant 0,\ \forall x, \ell \in \mathbb{R}, |x-\ell| < \epsilon \Leftrightarrow \ell - \epsilon < x < \ell + \epsilon.$

3.1 Suites convergentes et divergentes

Définition *On dit qu'une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

....

et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ *ou encore* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarques

• *Cet énoncé signifie que tout intervalle ouvert contenant* ℓ *contient tous les termes de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à partir d'un certain rang* $N_\epsilon \in \mathbb{N}$.

• ***La condition*** $|u_n - \ell| < \epsilon$ ***est équivalente à*** $\ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon$.

• *Cette définition peut se traduire de la façon suivante : à partir d'un certain rang, tous les éléments de la suite sont aussi proche de* ℓ *que l'on veut, la notion « d'aussi proche que l'on veut » se traduisant par « être à une distance de* ℓ *inférieure à* ϵ*, quel que soit le* ϵ *choisi. »*

Exemples

1. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$ *converge vers* 0.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $v_n = \dfrac{1}{n+1} + 2,\ n \in \mathbb{N}$ *converge vers* 2.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Définitions

1. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$...

   ....

   et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ *ou encore* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

   ....

   et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ *ou encore* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Exemples

1. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = \frac{1}{2}n - 1,\ n \in \mathbb{N}$ *tend vers* $+\infty$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

2. *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $v_n = -2n + 3,\ n \in \mathbb{N}$ *tend vers* $-\infty$.

   ....

   ....

   ....

   ....

   ....

Définitions *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est*..

....

Autrement dit, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ.

....

....

....

3.2 Propriétés des suites convergentes

Proposition 3.1 ....

Preuve. Supposons par l'absurde qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simultanément vers deux réels distincts $\ell_1 < \ell_2$. Alors on a

.... (1)

et

.... (2)

Notons $m = \dfrac{\ell_1 + \ell_2}{2}$ la moyenne des deux limites. En prenant $\epsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2} > 0$ dans (1) on a

. . . .

. . . .

. . . .

De la même façon, en prenant $\epsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{2} > 0$ dans (2) on a

. . . .

. . . .

. . . .

Mais alors, pour n **simultanément** supérieur à N_1 et N_2 . . . .

. . . . ■

Définition *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle, on appelle* . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemples *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos(n\pi)$. Alors les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$v_n = u_{2n} = \text{..........................} \quad \textit{et} \quad w_n = u_{n^2} = \text{..........................}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sont des sous suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \ldots & \to & \ldots \\ n & \mapsto & \ldots\ldots\ldots \end{array} \quad \textit{et} \quad \begin{array}{rcl} \psi : \ldots & \to & \ldots \\ n & \mapsto & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$ . . . .

En revanche, les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $x_n = u_{\sqrt{n}} =$ .... et

$y_n = u_{\frac{2}{n+1}} =$ ...., $n \in \mathbb{N}$ . . . .

. . . .

. . . .

Théorème 3.2 ....

....

Preuve. On considère $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geqslant n$ (à faire). ....

....

....

....

.... ■

Corollaire ....

....

Exemple *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$ *ne converge pas. Pour cela, il suffit d'exhiber deux sous-suites de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui convergent vers des limites différentes.*

....

....

....

On voit que l'on peut classer les suites en deux familles :

Suites convergentes	**Suites divergentes**	
Exemple : $u_n = \frac{1}{n+1}$	Les suites qui tendent vers $\pm\infty$ Exemple : $v_n = n$	Les suites qui n'admettent pas de limite Exemple : $w_n = (-1)^n$

Proposition 3.3 ....

Preuve. *(Voir Exercice 4)*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. ....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Proposition 3.4 ....

....

Preuve. ....

....

....

....

....

.... ■

Remarque *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée par $B \in \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\ell \geqslant B$.*

3.3 Opérations sur les limites

Proposition 3.5 *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers les réels ℓ et $\tilde{\ell}$.* ....

....

Preuve.

$\star$ **Convergence de la suite combinaison linéaire** $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:** on remarque que si $\lambda = 0$ le résultat est évident et on suppose dans ce qui suit $\lambda \neq 0$. On fixe $\epsilon > 0$. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$\star$ **Convergence de la suite produit** $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **:** On fixe $\epsilon > 0$. D'après la Proposition 3.3, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, il existe donc $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, ... En posant $M = \max(M_1, M_2)$, on a donc d'après la Proposition 3.4. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Proposition 3.6 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite convergeant vers* $\ell \neq 0$. . . . .

. . . .

. . . .

Preuve. Par convergence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, pour $\epsilon > 0$ on a

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Proposition 3.7 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que* $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$. . . . .

. . . .

. . . .

Preuve. Par divergence de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $+\infty$, on a

$$\forall M > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N_0, |u_n| > M > 0.$$

Ainsi, $\forall n \geqslant N_0$, $u_n \neq 0$ et $\frac{1}{u_n}$ est bien défini. Par divergence de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, |u_n| > M.$$

De cette façon, pour tout $n \geqslant N$, comme $n + N_0 > n \geqslant N$ et on a aussi

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_{n+N_0}| > M$$

et donc

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{1}{u_{n+N_0}}\right| < \frac{1}{M}. \qquad (\star)$$

Or la convergence de $\left(\frac{1}{u_{n+N_0}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 s'écrit

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{u_{n+N_0}}\right| < \epsilon.$$

Il suffit donc de choisir dans $(\star)$ un réel $M > 0$ de sorte que $\dfrac{1}{M} \leqslant \epsilon$. Par exemple $M = \dfrac{1}{\epsilon} > 0$ convient et on a le résultat. ■

Propriétés *On considère* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles. Les limites possibles pour la suite produit* $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont résumées dans le tableau suivant :*

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell_u \in \mathbb{R}^*$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_v \in \mathbb{R}^*$	$\ell_u \times \ell_v$	0	*signe*$(\ell_v) \times +\infty$	*signe*$(\ell_v) \times -\infty$
0	0	0	*Forme indéterminée*	*Forme indéterminée*
$+\infty$	*signe*$(\ell_u) \times +\infty$	*Forme indéterminée*	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	*signe*$(\ell_u) \times -\infty$	*Forme indéterminée*	$-\infty$	$+\infty$

Proposition 3.8 *(Comparaison de suites convergentes)*
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles convergentes telles que*

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \tilde{N} \Rightarrow v_n \leqslant u_n,$$

alors on a ....

Preuve. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\ell}$ et

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \tilde{N} \Rightarrow v_n \leqslant u_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = v_n - u_n$. Alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\ell} - \ell$ et par hypothèse,

$$\exists \tilde{N} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \tilde{N} \Rightarrow w_n \leqslant 0.$$

On souhaite montrer que $\tilde{\ell} - \ell \leqslant 0$ et on va raisonner par l'absurde comme dans la preuve de la Proposition 3.4 : supposons que $\tilde{\ell} - \ell > 0$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, par convergence de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\tilde{\ell} - \ell$ on a ....

....

En prenant $\epsilon =$..

....

.... ■

3.4 Critères de convergence

Proposition 3.9
. *Toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

. *Toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ....

Preuve. On montre le résultat pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée, le résultat pour les suites décroissantes et minorées s'en déduira alors en considérant $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc l'ensemble non vide $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré, d'après le Théorème 1.1, il admet une borne supérieure que l'on note ℓ. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. On considère $\epsilon > 0$. Comme $\ell - \epsilon < \ell$, par minimalité de la borne supérieure, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $u_{N_\epsilon} > \ell - \epsilon$ (voir Proposition 1.2). Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout entier $n \geqslant N_\epsilon$, on a

$$\ell - \epsilon < u_{N_\epsilon} \leqslant u_n \leqslant \ell < \ell + \epsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N_\epsilon$, $|u_n - \ell| < \epsilon$ ce qui montre bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. ∎

Définition *(Suites adjacentes)*

....

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

Théorème 3.10 ....

Preuve. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, on a en particulier :..................................

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Remarque *Si on relaxe l'hypothèse 4., on peut toujours montrer que les deux suites convergent mais les limites peuvent être différentes.*

Exemple *On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 - \frac{1}{n} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{n}.$$

Montrer que ces suites sont adjacentes. On a . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Théorème 3.11 *(Théorème des gendarmes)*
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$.

. . . .

. . . .

Preuve. Soit $\epsilon > 0$. Par convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Corollaire 3.12 *On considère* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles telles que*

1. ....

2. ....

Alors ....

3.5 Critères de divergence vers l'infini

Proposition 3.13

• ....

....

• ....

....

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. ....

....

....

....

....

Le cas d'une suite décroissante se traite de la même façon. ∎

Proposition 3.14 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite telle que*

1. ....

2. ....

Alors ....

Preuve. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, les termes $\frac{1}{u_n}$ sont toujours définis. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, u_n = |u_n| < \epsilon.$$

En particulier, $\forall n \geqslant N_\epsilon$, $\frac{1}{u_n} > \frac{1}{\epsilon}$. De cette façon,

$$\forall M = \frac{1}{\epsilon} > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N, \frac{1}{u_n} > \frac{1}{\epsilon} = M,$$

ce qui prouve bien que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. ∎

Remarque ....

....

En effet, si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 il est faux de penser dans le cas général que $(\frac{1}{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$.
Contre exemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ *converge vers . . . mais* $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{n}{(-1)^n}$ ....

3.6 Suite et série géométrique

Proposition 3.15 *(Suite géométrique)*
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = a^n$.

1. *Si $a = 1$* ....
2. *Si $a > 1$* ....
3. *Si $-1 < a < 1$* ....
4. *Si $a \leqslant -1$* ....

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \text{si} \quad a < 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \text{si} \quad a = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \text{si} \quad a > 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Si $a = 1$, alors ....
2. Si $a > 1$ alors ....

   on a bien divergence vers $+\infty$.

3. Si $-1 < a < 1$:
   . Si $a = 0$, alors ....

   . Si $0 < a < 1$ alors ....

   ....

   . Enfin, si $-1 < a < 0$, alors ....

   ....

   ....

   ....

4. Si $a \leqslant -1$ alors ....

   ....

   ....

   ....

   ....

■

Proposition 3.16 *(Série géométrique) On fixe un réel a, $a \neq 1$. En notant $\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + ... + a^n$, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Preuve. En multipliant la somme par $(1-a)$, on fait apparaitre une somme « télescopique » :

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

On obtient le résultat annoncé en divisant par $(1-a)$ des deux côtés. ■

4 Valeur d'adhérence et théorème de Bolzano-Weirestrass

4.1 Valeur d'adhérence

Définition *On appelle valeur d'adhérence (ou point d'accumulation) d'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ...

....

....

....

> **Proposition 4.1** $\alpha \in \mathbb{R}$ *est valeur d'adhérence d'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si et seulement si* ......
>
> ....

Exemple *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par* $u_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$*. On a*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = (-1)^{2n} = \ldots \text{ et } u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = \ldots$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$*,* 1 *est une valeur d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. De la même façon,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$ *donc* -1 *est aussi une valeur d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

> **Proposition 4.2** ....

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente : il existe alors $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. D'après le Théorème 3.2, toute sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, ℓ est donc l'unique valeur d'adhérence possible. ■

Remarque *On utilisera plutôt la contraposée du résultat précédent à savoir :* ....

....

....

4.2 Théorème de Bolzano-Weirestrass dans $\mathbb{R}$

> **Théorème 4.3** *(Bolzano-Weirestrass).* ....
>
> ....

Preuve. La preuve de ce théorème se fait par dichotomie.
• On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, notons a et b les réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}, a \leqslant u_n \leqslant b$. Posons $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $\phi(0) = 0$. Alors au moins un des deux intervalles $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ ou $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ contient u_n pour une infinité d'indices n. On note alors $[a_1, b_1]$ un tel intervalle et on note $\phi(1)$ un entier $\phi(1) > \phi(0)$ tel que $u_{\phi(1)} \in [a_1, b_1]$.
• En itérant cette construction, on fabrique pour tout entier naturel n un intervalle $[a_n, b_n]$ de longueur $\frac{b-a}{2^n}$ et un entier $\phi(n) > \phi(n-1) > ... > 0$ tel que $u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n]$.
• Par construction, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergent vers une même limite ℓ. On peut appliquer le Théorème des gendarmes pour conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$. ■

Les compléments de cours qui suivent concernent le parcours Mathématiques uniquement.

4.3 Limites supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$

Théorème 4.4 ***(Limite sup et limite inf d'une suite bornée)***
Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>bornée</u> de $\mathbb{R}$, on peut définir les suites de terme général :

$$a_n = \inf\{u_p, p \geqslant n\} \quad \textit{et} \quad b_n = \sup\{u_p, p \geqslant n\}.$$

Alors ces deux suites sont convergentes et on note

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\inf\{u_p, p \geqslant n\}\Big) \quad \textit{et} \ \limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup\{u_p, p \geqslant n\}\Big).$$

De plus, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

Preuve. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, les ensembles $A_n = \{u_p, p \geqslant n\}$ sont non vides et bornés, ils admettent dont une borne supérieure et une borne inférieure (Théorème 1.1) et donc les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. Par construction, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ et donc $\sup A_{n+1} \leqslant \sup A_n$ et $\inf A_n \leqslant \inf A_{n+1}$. Ainsi la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. D'après la Proposition 3.9, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\inf_{n\in\mathbb{N}} b_n$. D'après la Proposition 3.8, comme $a_n \leqslant b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} b_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} b_n,$$

c'est à dire $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n$. ■

Lemme *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non vide et on a :*

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} u_n &= \min\{\ell \in \mathbb{R},\ \ell \textit{ valeur d'adhérence de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\} \\
\limsup_{n\to+\infty} u_n &= \max\{\ell \in \mathbb{R},\ \ell \textit{ valeur d'adhérence de } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\}
\end{aligned}$$

Preuve. Admise. ■

Théorème 4.5 *Une suite réelle est convergente si et seulement si*

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \liminf_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}.$$

Et dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} u_n = \liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n$.

Preuve. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Supposons qu'elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. D'après la Proposition 4.2, ℓ est donc l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après le Lemme précédent, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\inf u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty}\sup u_n.$$

Réciproquement, si on suppose que $\lim_{n\to+\infty}\sup u_n = \lim_{n\to+\infty}\inf u_n = \ell \in \mathbb{R}$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\inf\{u_p, p \geqslant n\} \leqslant u_n \leqslant \sup\{u_p, p \geqslant n\}$$

par passage à la limite en utilisant le théorème des gendarmes, on a

$$\ell = \lim_{n\to+\infty}\inf u_n = \lim_{n\to+\infty}\inf\{u_p, p \geqslant n\} \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty}\sup\{u_p, p \geqslant n\} = \lim_{n\to+\infty}\sup u_n = \ell,$$

et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. ■

5 Suites de Cauchy

Définition *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall p > N,\ |u_n - u_p| < \epsilon,$$

ou, ce qui revient au même :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N},\ |u_{n+p} - u_n| < \epsilon.$$

Proposition 5.1 *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente alors c'est une suite de Cauchy.*

Preuve. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel ℓ. On se donne $\epsilon > 0$. On a alors $\frac{\epsilon}{2} > 0$ et par définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$. De cette façon, pour $n, p \geqslant N$, on a

$$|u_n - u_p| = |u_n - \ell + \ell - u_p| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell - u_p| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

ce qui prouve bien que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. ■

Remarque *Attention la réciproque de cette propriété est en général inexacte : par exemple, une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ ne converge pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \dfrac{E(n.\sqrt{2})}{n}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On a cependant le résultat suivant très utile :*

Théorème 5.2 *(Critère de Cauchy)*
Si $((u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une suite de Cauchy réelle alors elle converge dans $\mathbb{R}$.

Preuve. Admise. ■