Chapitre 1 : Dérivabilité d'une fonction et applications

Table des matières

1 Quelques rappels

Définitions 1 • *Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété*

$$\forall a, b \in I, \forall x \in \mathbb{R}, (a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I).$$

- *Un segment de $\mathbb{R}$ est un intervalle fermé de la forme $[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*
- *Un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Exemples 2 $[0,1[$ *est un intervalle,* $]2,+\infty[$ *est un intervalle ouvert et* $[0,1[\cup]2,+\infty[$ *n'est pas un intervalle.*

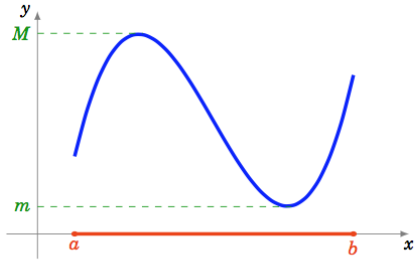
Définitions 3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
- *On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est à dire :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

- *On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.*

Théorème 4 ***(Weierstrass)*** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors*

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : f([a, b]) = [m, M].$$



Remarque 5 *Ce théorème signifie que si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. Donc m est le minimum de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$ alors que M est le maximum. Il dit aussi que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

2 Dérivabilité d'une fonction

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 6 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en x_0 si le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le nombre dérivé de f en x_0 et est notée $f'(x_0)$. Ainsi*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarque 7 *Si la limite n'existe pas ou vaut $\pm\infty$ alors la fonction n'est pas dérivable au point x_0.*

Définition 8 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la fonction dérivée de f elle se note f' ou $\dfrac{df}{dx}$.*

Définitions 9 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*
1) On dit que f est dérivable à droite en x_0 si le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0^+. La limite s'appelle alors le nombre dérivé à droite de f en x_0 et est notée $f'_d(x_0)$.
2) On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0^-. La limite s'appelle alors le nombre dérivé à gauche de f en x_0 et est notée $f'_g(x_0)$.

Exemples 10

1. *La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ on a*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}{x - x_0} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *La fonction* $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Nous allons utiliser les deux résultats suivants :*

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} ..... \quad \textit{et} \quad \sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{\qquad}{2}\right)\cos\left(\frac{\qquad}{2}\right), \ \forall p, q \in \mathbb{R}.$$

Le premier résultat (qui peut se démontrer géométriquement à l'aide d'aires et du théorème des gendarmes) prouve que $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow[x\to 0]{}$ ....., g *est donc dérivable en* $x_0 =$ .... *et* $g'(0) =$ .....
Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ *quelconque on écrit*

$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} =$ ....

Lorsque $x \to x_0$, *on a par continuité de la fonction cosinus :* $\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \xrightarrow[x\to x_0]{}$ .... *et en posant* $y = \frac{\qquad}{2}$ *on a*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\qquad}{\qquad} = ...$$

ainsi $\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{}$ .... *et donc* $g'(x) =$ ...., $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. *La fonction* $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ *est-elle dérivable à droite en* 0 *? À gauche en* 0 *? Pour tout* x *dans* $\mathbb{R}^*$, *notons* $\tau_h(x) = \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Proposition 11 *Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. f est dérivable en x_0 si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *f est dérivable à droite en x_0.*
2. *f est dérivable à gauche en x_0.*
3. *$f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.*

Dans ce cas, on a $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Exemple 12 *La fonction $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$ est-elle dérivable en 0 ?* . . . .

. . . .

. . . .

Définition 13 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si*

- . . . .

- . . . .

- . . . .

Proposition 14 *(Tangente et demi-tangente à la courbe représentative)*
Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- *Si f est dérivable en x_0 alors $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse x_0. L'équation de cette tangente est*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

- *Si f est dérivable à droite en x_0 (resp. à gauche en x_0) alors f admet une demi-tangente en x_0 de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).*

Proposition 15 *Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et est finie.*
- *f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ et, $\forall x \in I$*

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\ell + (x-x_0)\epsilon(x).$$

Preuve. Voir Semestre 1. ■

Théorème 16 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*
- *Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.*

Preuve. Supposons f dérivable en x_0 et montrons qu'elle est continue en x_0. Fixons $\epsilon' > 0$. ......

....

....

....

Soit $\delta > 0$. Pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\leqslant \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &< \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On voudrait choisir $\delta > 0$ de sorte que $\delta|\ell| \leqslant$ .... et $\delta|\epsilon(x)| \leqslant$ .... et dans ce cas on aurait

$$|f(x) - f(x_0)| < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui prouverait que f est continue en x_0. Peut-on trouver un tel $\delta > 0$?..........................

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Remarques 17 *1) Cette proposition n'est utile que pour démontrer qu'une fonction n'est pas dérivable quand elle n'est pas continue.*

2) Attention, la réciproque de ce résultat est fausse : par exemple la valeur absolue $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array}$

. . . .

. . . .

. . . .

2.2 Opérations élémentaires

Propriétés 18 *(Règles de dérivation)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I. Alors pour tout $x \in I$

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *si* $g(x) \neq 0$.

Preuve. Voir Semestre 1. ■

Proposition 19 *Soient I, J deux intervalles ouverts, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $\mathcal{I}(f) \subset J$. Alors pour tout $x \in I$, g est dérivable en $f(x)$, $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et*

$$\boxed{\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).}$$

Preuve. Voir Semestre 1. ■

Corollaire 20 *Soient I sur un intervalle ouvert, $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et*

$$\boxed{\forall y \in J,\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.}$$

Preuve. Voir Semestre 1. ■

2.3 Dérivées successives et classes de fonctions

Définitions 21 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et f' sa dérivée.*

- *Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable sur I, on note* ....

  ....

  ....

- *Plus généralement, on dit que f est n-fois dérivable ($n \in \mathbb{N}^*$) si* ....

  ....

  ....

Théorème 22 *(Formule de Leibniz)*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle ouvert et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1} f^{(n-1)}g^{(1)} + \dots + \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)} + \dots + fg^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Remarque 23 *Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} =$* ....

....

Exemples 24

- *Pour $n = 1$ on retrouve $(fg)' = f'g + g'f$.*

- *Pour $n = 2$ on a $\binom{2}{0} = \dfrac{2!}{0!(2-0)!} = \dots\dots\dots$, $\binom{2}{1} = \dfrac{2!}{1!(2-1)!} = \dots\dots$ et $\binom{2}{2} = \dfrac{2!}{2!(2-2)!} = \dots\dots$*
  Alors

$$\begin{aligned}(fg)'' &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} f^{(2-k)}.g^{(k)} \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Définitions 25 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

- *On dit que f est de <u>classe $\mathscr{C}^0$ sur I</u> si* ....
  On note alors $f \in \mathscr{C}^0(I)$.

- *On dit que f est de <u>classe $\mathscr{C}^1$ sur I</u> si* ....

  ....

  On note alors $f \in \mathscr{C}^1(I)$.
- *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de <u>classe $\mathscr{C}^n$ sur I</u> si* ....

  ....

  On note alors $f \in \mathscr{C}^n(I)$.
- *On dit que f est de <u>classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I</u> si f est* ....

  ....

  On note alors $f \in \mathscr{C}^\infty(I)$.

Remarque 26 *Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a les inclusions $\mathscr{C}^{n+1}(I) \subset \mathscr{C}^n(I)$ et $\mathscr{C}^\infty(I) \subset \mathscr{C}^n(I)$.*

Exemple 27 *De quelle classe est la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$?* ....

....

....

....

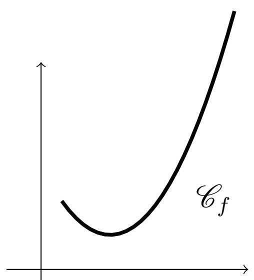
....

Proposition 28 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathscr{C}^n(I)$. Alors*

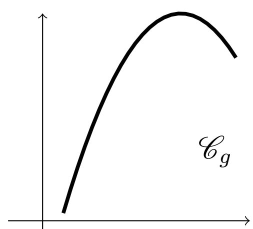
1. *λf, $f + g$, $f \times g \in \mathscr{C}^n(I)$.*
2. *Si de plus g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g} \in \mathscr{C}^n(I)$.*
3. *Si de plus $g \in \mathscr{C}^n(J)$ avec $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathscr{C}^n(I)$.*

2.4 Convexité et concavité

Graphiquement, une fonction f définie sur un intervalle est convexe si et seulement si, pour tous points A et B appartenant au graphe de f, le graphe de f entre A et B est en dessous du segment $[A, B]$. Pour une fonction concave, c'est le contraire : le graphe est au dessus du segment $[A, B]$.



f est ....



g est ....

Lemme 29 *(Description d'un intervalle)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Le critère suivant décrit l'intervalle $[a, b]$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \in [a, b] \Leftrightarrow \exists t \in [0, 1] : x = ta + (1 - t)b.$$

Preuve. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Définitions 30 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

• *f est **convexe** sur I si elle vérifie*..

....

• *f est **concave** sur I si* ....

Proposition 31 *(Critère de convexité)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I.

• *Si $f'' \geqslant 0$ sur I alors* ....

• *Si $f'' \leqslant 0$ sur I alors* ....

Preuve. Voir TD. On verra que la réciproque de ce résultat est également vraie. ■

Proposition 32 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.*

• *Si f est convexe sur I alors* ....

• *Si f est concave sur I alors* ....

Preuve. Voir TD. ■

Remarque 33 *Cette proposition nous dit que si f est dérivable et convexe, le graphe de f est au dessus de chacune de ses tangentes alors que si elle est concave, le graphe est au dessous de chacune de ses tangentes. Notons que la réciproque de la Proposition 32 est également vraie.*

Exemples 34 1. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$. ....

....

....

....

....

2. *Montrer que* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$. ....

....

....

....

....

3 Extremum local et théorème de Rolle

3.1 Extremum local

Définitions 35 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.*

1. *On dit que f admet un <u>maximum local</u> en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que*

   ....

2. *On dit que f admet un <u>maximum global</u> en x_0 si*

   ....

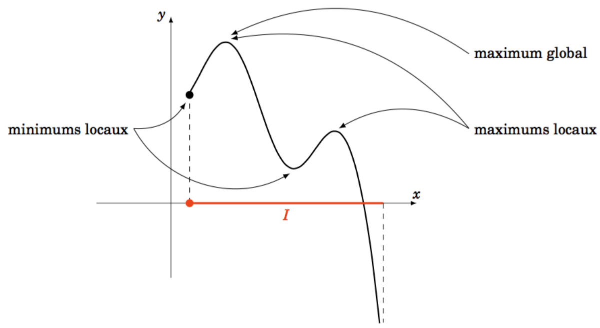
3. *On dit que f admet un <u>minimum local</u> en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que*

   ....

4. *On dit que f admet un <u>minimum global</u> en x_0 si*

   ....

5. *On dit que f admet un <u>extremum local</u> en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0.*



Remarque 36 *Dire que f admet un maximum local en x_0 signifie que $f(x_0)$ est la plus grande des valeurs $f(x)$ pour les x proches de x_0. Par ailleurs, si x_0 est un maximum global, alors x_0 est un maximum local mais la réciproque est <u>fausse</u>.*

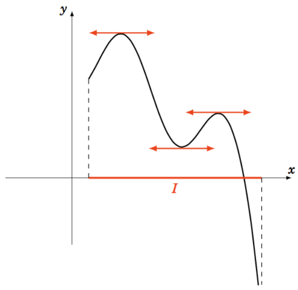
Définition 37 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. On dit que $x_0 \in I$ est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.*

Théorème 38 *Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. ...*

....

....

Remarque 39 *Ce théorème signifie que si une fonction f admet un extremum local en x_0 alors x_0 est un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$, la tangente au graphe $\mathscr{C}_f$ de f est horizontale.*



Preuve. Supposons que f admet un maximum local en x_0. Il existe donc un intervalle ouvert J tel que

....

Montrons que $f'(x_0) = 0$. Soit $x \in I \cap J$.

— Si $x < x_0$ alors $f(x) - f(x_0)$......... et $x - x_0$...... donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$........ et par passage à la limite

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ldots\ldots\ldots$$

— Si $x > x_0$ alors $f(x) - f(x_0)$......... et $x - x_0$...... donc $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$........ et par passage à la limite

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ldots\ldots\ldots$$

Or f est dérivable en x_0 donc $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$ ...., ainsi $f'(x_0)$........... et $f'(x_0)$........... donc $f'(x_0) =$ ..... ■

Exemple 40 *Étudier les extremum de la fonction* $f : \begin{array}{ccc} [-3, 3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{3} - 4x. \end{array}$

On calcule la dérivée de f : $\forall x \in [-3, 3]$, $f'(x) =$ .... ainsi, f' s'annule en .... $\in]-3, 3[$ et .... $\in]-3, 3[$, les points critiques de f sont donc .... et .... Pour déterminer f admet des extremums en ces points, dressons le tableau de variations de f.

x	-3 3
$f'(x)$	
$f(x)$	

....

....

....

....

....

....

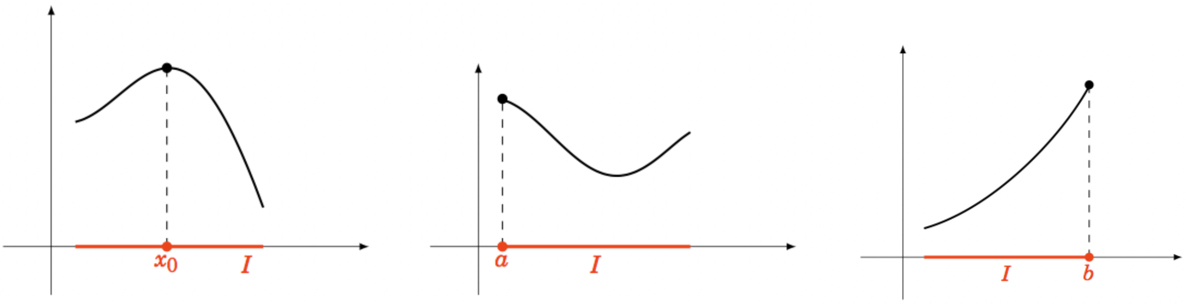
....

....

Remarques 41

1. *La réciproque de ce théorème est fausse : la fonction* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$ *admet* $x_0 = 0$ *comme point critique mais* $f(0)$ *n'est ni un maximum local, ni un minimum local.*
2. *Dans ce théorème, la fonction* f *est définie sur un intervalle* <u>*ouvert*</u> *: dans le cas d'un intervalle fermé, il faut faire attention aux extrémités.*
   Par exemple, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction dérivable qui admet un extremum local en* x_0*, trois cas sont possibles :*
   - *Soit* $x_0 \in]a, b[$ *et dans ce cas* $f'(x_0) = 0$ *d'après le théorème.*
   - *Soit* $x_0 = a$ *et dans ce cas on ne peut rien dire sur* $f'(x_0)$*.*
   - *Soit* $x_0 = b$ *et dans ce cas on ne peut rien dire sur* $f'(x_0)$*.*

   En effet,aux extrémités de $[a, b]$ *le théorème ne s'applique pas comme nous le montrent les exemples suivants :*



3. *Pour déterminer les extremums locaux et globaux d'une fonction* f *sur un intervalle fermé* $[a, b]$*, il faut comparer les valeurs de* f *aux points critiques et aux extrémités* a *et* b*.*

Théorème 42 *Soient* I *un intervalle* <u>*ouvert*</u>*,* $x_0 \in I$ *et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* I*. Si* f' *s'annule en* x_0 *en changeant de signe alors* f *admet un extremum local en* x_0*.*

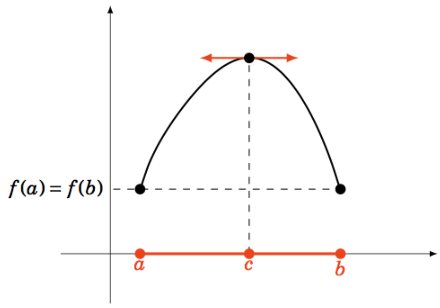
Preuve. Voir TD. ∎

3.2 Théorème de Rolle

Théorème 43 *(Théorème de Rolle) Soient* $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que*

- ....
- ....
- ....

....



Remarque 44 *Géométriquement, ce théorème assure qu'il existe au moins un point du graphe de* f *où la tangente est horizontale.*

Preuve. Si f est constante sur $[a, b]$ alors n'importe quel $c \in]a, b[$ convient.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

4 Théorème des accroissements finis

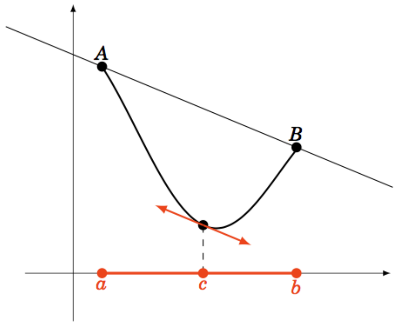
4.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 45 *(Théorème des accroissements finis)*
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *et dérivable sur* $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ *tel que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Remarque 46

Géométriquement, ce théorème assure qu'il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.



Preuve. ∎

4.2 Inégalité des accroissements finis

Corollaire 47 *(Inégalité des accroissements finis)*
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leqslant M$ alors

$$\forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Preuve. Fixons $x, y \in [a,b]$. D'après le Théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y).$$

Comme $|f'(c)| \leqslant M$ on en déduit que $|f(x) - f(y)| = |f'(c) \times (x-y)| = |f'(c)| \times |x-y| \leqslant M|x-y|$. ∎

Exemple 48 *Soit* $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$ ....

....

....

....

....

....

....

4.3 Limite de la dérivée et prolongement de classe $\mathscr{C}^1$

Remarque 49 *Attention, rien ne permet a priori d'affirmer que les limites :*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ et } \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

si elles existent sont égales. Conceptuellement, ces limites sont très différentes.

Théorème 50 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $a < b$ *et* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $]a, b[$ *et continue en* a*. Si* $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \ell$ *existe et est finie alors*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} f'(x).$$

Preuve. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Théorème 51 *(Théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^1$) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^1(]a,b[)$. Si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ existent et sont finies, alors le prolongement par continuité de f à $[a,b[$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$.*

Preuve. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Remarque 52 *Les théorèmes précédents ont été énoncés au voisinage d'un point a à droite, mais auraient pu l'être au voisinage du point b à gauche.*

Exemple 53 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 2$. La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^\alpha \sin(\frac{1}{x})$, $\forall x > 0$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.* ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Sans le Théorème 51, nous aurions dû étudier à part la dérivabilité de f en 0 en revenant à la définition avec taux d'accroissement.

4.4 Signe de la dérivée et monotonie

Corollaire 54 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors*

1. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ *est croissante sur* $[a, b]$.
2. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f$ *est décroissante sur* $[a, b]$.
3. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ *est constante sur* $[a, b]$ *(*$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in [a, b], f(x) = \alpha$*).*
4. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ *est strictement croissante sur* $[a, b]$.
5. $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) < 0 \Rightarrow f$ *est strictement décroissante sur* $[a, b]$.

Remarque 55 *La réciproque des points $4)$ et $5)$ est fausse : par exemple la fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et pourtant sa dérivée s'annule en 0.*

Preuve. Prouvons par exemple $1)$:

Sens $(\Rightarrow)$: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

4.5 Fonctions lipschitziennes

Définitions 56 *(Applications lipschitziennes et contractantes)*
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est <u>k-lipschitzienne</u> sur I (ou lipschitzienne de paramètre k) s'il existe $k \in]0, +\infty[$ tel que

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|.$$

L'application est dite <u>contractante</u> lorsque le paramètre $k \in]0, 1[$.

Proposition 57 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^1([a, b])$. Alors f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ pour*

$$k = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Preuve. Il s'agit d'une application directe du Théorème des accroissements finis. ■

Exemple 58 *On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$. Montrer que f est k-lipschitzienne sur $[-1, 1]$ (avec $k > 0$ à déterminer) et contractante sur $[0, \frac{1}{4}]$.* . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4.6 Application au calcul de limites : règle de l'Hospital

Nous introduisons ci-dessous une technique qui permet de lever les indéterminations du type « $\frac{0}{0}$ » pour le calcul de limites. Attention, avant d'utiliser la méthode qui suit, on commence par vérifier si on ne peut pas simplifier l'expression de la fraction, en factorisant numérateur et dénominateur par la même quantité !

Corollaire 59 *(Règle de l'Hospital)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$.
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$.

$$\boxed{\textit{Si } \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \textit{ alors } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$

Preuve. Fixons $a \in I \setminus \{x_0\}$ tel que $g(a) \neq 0$[†], par exemple $a < x_0$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$h(x) =$ ...., $\forall x \in I$. Alors

- h est continue sur $[a, x_0] \subset I$.
- h est dérivable sur $]a, x_0[$.
- $h(x_0) = h(a) = 0$.

D'après le théorème de Rolle,..

$h'(x) =$ ....

donc $h'(c) =$ .... Comme g' ne s'annule pas sur $I \setminus \{x_0\}$ et $g(a) \neq 0$, on a

....

Comme $a < c < x_0$, lorsque l'on fait tendre a vers x_0, c tend alors aussi vers x_0 et on obtient

.... ■

Exemple 60 *Calculer* $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x^2+x-1)}{\ln(x)}$. *On a*

- $I =]\frac{3}{4}, 2[$.
- $f : x \mapsto \ln(x^2+x-1)$ *est dérivable sur* I*,* $f(1) =$ .... *et* $f'(x) =$ ....
- $g : x \mapsto \ln(x)$ *est dérivable sur* I*,* $g(1) =$ .... *et* $g'(x) =$ ....
- $\forall x \in I \setminus \{1\}$, ...

De plus

....

....

†. Un tel point a existe car la fonction g ne peut pas être identiquement nulle sur I : sinon l'hypothèse $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$ ne pourrait être vérifiée.