Chapitre 2 : Développements limités

Table des matières

1 Relations de comparaison entre fonctions : rappels **1**
1.1 Objectif . . . 1
1.2 Relation de domination et de prépondérance . . . 2
1.3 Relation d'équivalence . . . 3
1.4 Application au calcul de limites . . . 5

2 Développements limités **7**
2.1 Formules de Taylor-Lagrange et Taylor-Young . . . 8
2.2 Somme et produit de DL . . . 10
2.3 Application au calcul de limites . . . 12
2.4 Position d'une courbe par rapport à sa tangente . . . 13
2.5 DL des fonctions usuelles en 0 à l'ordre 4 . . . 14

1 Relations de comparaison entre fonctions : rappels

Définition 1 *Pour tout sous-ensemble ϑ de $\mathbb{R}$, on dit que ϑ est un* ***voisinage*** *de x_0 s'il existe un intervalle ouvert I tel que $x_0 \in I$ et $I \subset \vartheta$. On note alors $\vartheta \in \mathcal{V}_{x_0}$.*

Exemples 2 *$\vartheta = [x_0-1, x_0+1[$ est un voisinage de x_0 car il existe un intervalle ouvert $I =]x_0-1, x_0+1[$ tel que $x_0 \in I$ et $I \subset \vartheta$. On remarque que I est également un voisinage de x_0.*

Définition 3 *Pour tout sous-ensemble D de $\mathbb{R}$, on dit qu'un réel x_0 est* ***adhérent à*** *D si tout voisinage de x_0 est d'intersection non vide avec D : $\forall \vartheta \in \mathcal{V}_{x_0}, \vartheta \cap D \neq \varnothing$. On note alors $x_0 \in \overline{D}$.*

1.1 Objectif

On considère deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I et un point $a \in \overline{I}$. On souhaite comparer ces deux fonctions dans un voisinage de a. En supposant que f et g ne s'annulent pas sur un voisinage ϑ de a privé de a, on s'intéresse à l'analyse du rapport $\dfrac{f}{g}$. Trois cas intéressants se présentent alors :

Cas 1 : $\dfrac{f}{g}$ est borné sur $\vartheta \setminus \{a\}$.

Cas 2 : $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0 lorsque x tend vers a.

Cas 3 : $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 lorsque x tend vers a.

1.2 Relation de domination et de prépondérance

Définition 4 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions ne s'annulant pas sur un voisinage ϑ de a privé de a. On dit que $\underline{f \text{ est dominée par } g}$ au voisinage de a si*

$$\frac{f}{g} \text{ est bornée sur } \vartheta \smallsetminus \{a\}.$$

Notation : On note $f(x) = O_a(g(x))$ ou bien $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de a. On dit que f est un grand O de g.

Remarques 5 *1) Par abus de langage, on notera $O_a(g)$ toute fonction étant un grand O de g au voisinage de a.*
2) La notation $f = O(g)$ ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.
3) Écrire $f = O(1)$ au voisinage de a signifie que f est bornée au voisinage de a.

Exemple 6 *On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^5 - x^4 + 2x \end{array}$. Alors $f(x) = O(x)$ au voisinage de 0 et $f(x) = O(x^5)$ au voisinage de $+\infty$.*

Définition 7 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions ne s'annulant pas sur un voisinage ϑ de a privé de a. On dit que $\underline{f \text{ est négligeable devant } g}$ au voisinage de a si*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Notation : On note $f(x) = o_a(g(x))$ ou $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a ou encore $f(x) << g(x)$. On dit que f est un petit o de g.

Remarques 8 *1) Par abus de langage, on notera $o(g)$ toute fonction négligeable devant g au voisinage de a.*
2) La notation $f = o(g)$ ne veut rien dire si l'on ne precise pas au voisinage de quel point on se trouve.
3) Écrire $f = o(1)$ au voisinage de a signifie que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Exemple 9 *On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^5 - x^4 + x^2 \end{array}$. Alors $f(x) = o(x)$ au voisinage de 0 et $f(x) = o(x^6)$ au voisinage de $+\infty$.*

Proposition 10 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions ne s'annulant pas sur un voisinage ϑ de a privé de a. Si f est négligeable au voisinage de a devant g alors f est dominée par g au voisinage de a.*

Remarque 11 *Ce résultat signifie que, $\forall x \in \vartheta, f(x) = o_a(g(x)) \Rightarrow f(x) = O_a(g(x))$.*

Proposition 12 *(Opérations sur les relations de domination et de prépondérance)*
En se plaçant au voisinage d'un point a, on a :

1)	$f = o(g)$ *et* $g = o(h)$	$\Rightarrow$	$f = o(h)$,	*on a donc*	*transitivité*
2)	$f_1 = o(g)$ *et* $f_2 = o(g)$	$\Rightarrow$	$f_1 + f_2 = o(g)$	*c'est à dire*	$o(g) + o(g) = o(g)$
3)	$f_1 = o(g_1)$ *et* $f_2 = o(g_2)$	$\Rightarrow$	$f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$	*c'est à dire*	$o(g_1) \times o(g_2) = o(g_1 \times g_2)$
4)	$f = o(g)$	$\Rightarrow$	$hf = o(hg)$	*c'est à dire*	$h \times o(g) = o(h \times g)$
5)	$f = o(\lambda g)$ (*avec* $\lambda \in \mathbb{R}^*$)	$\Rightarrow$	$f = o(g)$	*c'est à dire*	$o(\lambda g) = o(g)$

Ces cinq implications restent vraies si on remplace la relation o par O.

1.3 Relation d'équivalence

Définition 13 *Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g deux fonctions définies dans un voisinage ϑ de a. On dit que <u>f et g sont équivalentes</u> au voisinage de a s'il existe une fonction $\epsilon : \vartheta \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \vartheta$*

$$f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x)) \text{ avec } \lim_{x \to a} \epsilon(x) = 0.$$

Notation : On note $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f \sim g$ $(x \to a)$ ou $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$.

Remarques 14 *1) La notation $f \sim g$ ne veut rien dire si l'on ne precise pas au voisinage de quel point on se trouve.*
2) Il ne faut jamais écrire $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ puisque la fonction nulle ne vérifie pas la condition d'application de la définition.
3) Attention, l'implication entre $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ est en général fausse ! Ces deux propriétés définissent des notions de proximité différentes.

Proposition 15 *Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g deux fonctions définies dans un voisinage ϑ de a. Si g ne s'annule pas sur ϑ (sauf éventuellement en a) alors*

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Preuve. Voir TD. ∎

Exemple 16 *On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x^5 - x^4 + 2x \end{array}$. Alors $f(x) \underset{0}{\sim} 2x$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 3x^5$.*

Remarque 17 *La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence au voisinage de a, ce qui veut dire qu'elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1) Réflexivité : $f \underset{a}{\sim} f$.   2) Symétrie : $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow g \underset{a}{\sim} f$.   3) Transitivité : $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h \Rightarrow f \underset{a}{\sim} h$.

Proposition 18 *Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.*

Preuve. La preuve est évidente en utilisant la Définition 13. ∎

Propriétés 19 *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On a les implications suivantes :*

$$\begin{aligned}
f \underset{a}{\sim} g \ \text{ et } \ f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad &\Rightarrow \quad f \times f_1 \underset{a}{\sim} g \times g_1.\\
f \underset{a}{\sim} g \ \text{ et } \ f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{f}{f_1} \underset{a}{\sim} \frac{g}{g_1} \text{ si } f_1 \neq 0 \text{ et } g_1 \neq 0.\\
f \underset{a}{\sim} g \quad &\Rightarrow \quad \lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}.\\
f \underset{a}{\sim} g \quad &\Rightarrow \quad f^n \underset{a}{\sim} g^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.\\
f \underset{a}{\sim} g \quad &\Rightarrow \quad f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ si } f > 0 \text{ et } g > 0.
\end{aligned}$$

Remarque 20 *Attention, si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, en général on n'a pas*

$$f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2, \ e^{f_1} \underset{a}{\sim} e^{g_1} \text{ ou encore } \ln(f_1) \underset{a}{\sim} \ln(g_1),$$

comme nous le montre les contre-exemples suivant : $x + 1 \underset{0}{\sim} 1$, $-1 \underset{0}{\sim} -1$ mais $x = x + 1 - 1 \underset{0}{\not\sim} 1 - 1 = 0$.

$$\frac{x+1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \text{........ donc } x + 1 \underset{+\infty}{\sim} \text{....... mais } \frac{e^{x+1}}{e^x} = \text{......} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \text{.......} \neq 1 \text{ donc } e^{x+1} \underset{+\infty}{\not\sim} e^x.$$

Proposition 21 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable en a avec $f'(a) \neq 0$ alors*

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x - a).$$

Exemples 22

1. *Donner un équivalent de $x \mapsto \ln(1 + x)$ en 0.* ....

....

....

....

....

2. *Donner un équivalent de* $x \mapsto \sin(x)$ *en* 0. ....

....

....

....

....

3. *Donner un équivalent de* $x \mapsto \tan(x)$ *en* 0. ....

....

....

....

....

4. *Donner un équivalent de* $x \mapsto e^x - 1$ *en* 0. ....

....

....

....

....

Proposition 23 *(Lien entre les relations de comparaison)*
Soient I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, *et* $f, g, \alpha : I \to \mathbb{R}$ *des fonctions ne s'annulant pas sur un voisinage* ϑ *de* a *privé de* a. *Au voisinage de* a, *on a les relations suivantes*

1. $f(x) \sim g(x)$ *si et seulement si* $f(x) = g(x) + o(g(x))$.
2. *Si* $f(x) \sim g(x)$ *alors* $f(x) = O(g(x))$.
3. *Si* $f(x) \sim g(x)$ *et* $f(x) = o(\alpha(x))$ *alors* $g(x) = o(\alpha(x))$.
4. *Si* $f(x) \sim g(x)$ *et* $\alpha(x) = o(f(x))$ *alors* $\alpha(x) = o(g(x))$.

1.4 Application au calcul de limites

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{\tan(6x)}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = ...$, on a ....

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(x)} = \lim_{X\to 0} \text{..............................} = \ldots \Rightarrow \ln(1+\sin(x)) \underset{0}{\sim} \text{..........................} \underset{0}{\sim} \ldots.$$

....

....

....

....

2. **Calculer** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-e^x)\sin(x)}{x^2+x^3}$. **On a**

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{0}{\sim} \ldots.., \\ e^x - 1 = \ldots\ldots\ldots\ldots &\underset{0}{\sim} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots. \Rightarrow 1-e^x \underset{0}{\sim} \ldots.., \\ x^2+x^3 &\underset{0}{\sim} \ldots.. \end{aligned}$$

....

....

3. **Calculer** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$. **On a**

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{0}{\sim} \ldots.., \\ x &\underset{0}{\sim} \ldots.., \\ \ln(1+x^2) &\underset{0}{\sim} \ldots.. \quad \textbf{car } \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \lim_{X\to 0}\frac{}{} = \ldots.., \\ \tan(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\underset{0}{\sim} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} \underset{0}{\sim} \frac{}{} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Et donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} = \ldots..$

4. **Calculer** $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(e+x))^{\frac{1}{x}}$. $\forall x \in]1-e,+\infty[\setminus\{0\}$, $\big(\ln(e+x)\big)^{\frac{1}{x}} =$...................................

....

....

$\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{x}{e}\right) = \ldots.$ **et** $\lim\limits_{X\to 0}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = \ldots..$ **donc en posant** $X = \ln(1+\dfrac{x}{e})$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\ln(1+\frac{x}{e})\right)}{\ln(1+\frac{x}{e})} = \ldots..$

ceci montre que

$\ln\left(1+\ln(1+\dfrac{x}{e})\right) \underset{0}{\sim}$ ....

Finalement

$\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\ln(1+\dfrac{x}{e})\right) \underset{0}{\sim}$ ....

et donc

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln(e+x)\right)^{\frac{1}{x}} =$ ....

5. **Calculer** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\big(1+2\tan(x)\big)}{\sin(x)}$. **On a** $2\tan(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$ ..... **et** $\dfrac{\ln(1+X)}{X} \underset{X\to 0}{\longrightarrow}$ ..... **ainsi en posant**

   $X =$ ...., **on a** $\dfrac{\ln(1+2\tan(x))}{2\tan(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow}$ ..... **et donc** $\ln(1+2\tan(x)) \underset{0}{\sim}$ ....

   Alors
$$\frac{\ln\big(1+2\tan(x)\big)}{\sin(x)} \underset{0}{\sim} \text{..........................} \quad \textbf{et} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(1+2\tan(x)\big)}{\sin(x)} = \text{.....}$$

6. **Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. **On a** $\forall x > 0$
$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \text{...........................}$$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\qquad\qquad\qquad}{} = \text{.....} \Rightarrow \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \text{..........} \Rightarrow x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \text{.....}$

   Finalement $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \text{.....}$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \text{.............}$

2 Développements limités

L'objectif ici est de trouver, pour n'importe quelle fonction, un polynôme de degré n qui approche la fonction autour d'un point. Plus précisément, on cherchera à décomposer toute fonction suffisamment régulière f au voisinage d'un point a donné sous la forme :
$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$
où T_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et R_n est une fonction qui vérifie $\lim\limits_{x\to a} R_n(x) = 0$. Décomposer de cette façon une fonction autour d'un point a, c'est faire un développement limité de cette fonction au point a à l'ordre n. Le polynôme T_n est appelé <u>partie polynomiale du DL</u> et la fonction R_n est appelée <u>le reste du DL</u>.

Remarque 24 *On pourra utiliser l'abréviation « DL » pour « développement limité ».*

Définition 25 *Soient I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité au point a et à l'ordre n s'il existe $(n+1)$ réels $c_0, c_1, ..., c_n$, un voisinage ϑ de a et une fonction $\epsilon : \vartheta \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ tels que pour tout x dans $I \cap \vartheta$*
$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ... + c_n(x-a)^n}_{\textit{Partie polynomiale du DL}} + \underbrace{(x-a)^n\epsilon(x)}_{\textit{Reste du DL}}.$$

Remarques 26 *1) Si une fonction admet un DL en un point à un ordre donné, alors ce DL est unique.*
2) L'assertion « f admet un DL » ne veut rien dire si on ne précise pas en quel point et à quel ordre.
3) La partie polynomiale peut aussi s'écrire sous forme abrégée $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$.
3) Le reste $(x-a)^n\epsilon(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme $o_a\big((x-a)^n\big)$.

2.1 Formules de Taylor-Lagrange et Taylor-Young

Rappel : Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la factorielle de n par $n! = 1 \times 2 \times .... \times (n-1) \times n$ avec la convention $0! = 1$. On a de plus $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = (n-1)! \times n$.

Théorème 27 *(Formule de Taylor-Lagrange)*
Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a, x \in I$. Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I alors il existe un réel c entre a et x tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Remarques 28 *1) Dans la plupart des cas, on ne connaitra c mais ce théorème permet d'encadrer le reste. Remarquons que c dépend du choix de a, x et n.*
2) Pour $n = 0$ on obtient exactement l'énoncé du théorème des accroissements finis.
3) La formule précédente est appelée formule de Taylor-Lagrange au point a et à l'ordre n.

Preuve.

....

....

....

Notons que l'on peut affaiblir l'hypothèse « $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I)$ » par « $f \in \mathscr{C}^{n}(I)$ et $f^{(n+1)}$ existe ». ■

Théorème 29 *(Formule de Taylor-Young)*
Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors pour tout x dans I

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x),$$

où la fonction $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifie $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$.

Remarques 30 *1) Le terme $(x-a)^n \epsilon(x)$ est souvent noté $o_a\big((x-a)^n\big)$. Rappelons que cela signifie que*

$$\lim_{x \to a} \frac{o_a\big((x-a)^n\big)}{(x-a)^n} = 0.$$

En pratique, lorsque $a = 0$, on écrit « o » plutôt que « o_0 » si aucune confusion n'est possible.
2) La formule précédente est appelée formule de Taylor-Young en a à l'ordre n. En 0 et à l'ordre n elle s'écrit donc :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).}$$

Preuve. f étant une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, nous appliquons la formule de Taylor-Lagrange au rang $n-1$. Pour tout x dans I, il existe .... compris entre .... et .... tel que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n.$$

que nous réécrivons sous la forme :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pose $\epsilon(x) =$ ....

Puisque f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, on en déduit que $f^{(n)}$ est .... sur I et que $c(x) \xrightarrow[x \to a]{}$ ...... alors $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) =$ .... et la formule de Taylor-Young est démontrée. ■

Proposition 31 *Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a alors f admet un DL au point a à l'ordre n.*

Preuve. Le DL est donné par la formule de Taylor-Young. ■

Exemples 32

1. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *fixés. Donner le DL au point* a *et à l'ordre* n *de la fonction* $f : x \mapsto e^x$.

$$f(x) = \text{..........} \quad f(a) = \text{.....,} \quad f'(x) = \text{..........} \quad f'(a) = \text{.....,}$$

$$f''(x) = \text{..........} \quad f''(a) = \text{.....,} \quad f^{(n)}(x) = \text{..........} \quad f^{(n)}(a) = \text{.....}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$$

= ....

....

2. *Donner le DL de la fonction* $f : x \mapsto \ln(1+x)$ *au point* 0 *et à l'ordre* 4.

$$f(x) = \text{..................} \quad f(0) = \text{.....,}$$

$$f'(x) = \text{..................} \quad f'(0) = \text{.....,} \quad f^{(3)}(x) = \text{..................} \Rightarrow f^{(3)}(0) = \text{.....,}$$

$$f''(x) = \text{..................} \quad f''(0) = \text{.....,} \quad f^{(4)}(x) = \text{..................} \Rightarrow f^{(4)}(0) = \text{.....}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ &= \text{..} \\ &= \text{..} \end{aligned}$$

2.2 Somme et produit de DL

Définition 33 *Soit* $n, p \in \mathbb{N}^*$ *avec* $n < p$. *Tronquer un polynôme de degré* p *à l'ordre* n *consiste à conserver seulement les monômes de degrés* $\leqslant n$.

Exemples 34

1. Tronquer le polynôme $P : x \mapsto x^8 + 2x^7 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 1$ *à l'ordre* 5. *On notera* T_5 *le polynôme obtenu.* $T_5 : x \mapsto$ ....

2. Tronquer le polynôme $Q : x \mapsto (x+2x+4x^2)(1+x+x^3)$ *à l'ordre* 2. *On notera* T_2 *le polynôme obtenu.*

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, (x+2x+4x^2)(1+x+x^3) &= \text{..} \\ &= \text{..} \end{aligned}$$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, T_2(x) =$ ....

Proposition 35 *On considère deux fonctions f et g qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :*

$$f(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n + o(x^n) \text{ et } g(x) = d_0 + d_1x + ... + d_nx^n + o(x^n).$$

Alors :

. $f+g$ *admet un DL en 0 à l'ordre n qui est donné par :*

$$(f+g)(x) = (c_0+d_0) + (c_1+d_1)x + ... + (c_n+d_n)x^n + o(x^n).$$

. $f \times g$ *admet un DL en 0 à l'ordre n qui est donné par*

$$(f\times g)(x) = T_n(x) + o(x^n),$$

où $T_n(x)$ est le polynôme

$$x \mapsto (c_0 + c_1x + ... + c_nx^n) \times (d_0 + d_1x + ... + d_nx^n)$$

tronqué à l'ordre n*.*

Remarque 36 *Si on connait le DL de f et g en un point $a \neq 0$, on peut obtenir le DL de $f+g$ en sommant les parties polynomiales comme énoncé dans la proposition précédente, mais pour le DL du produit $f \times g$ en $a \neq 0$, la proposition ne s'applique pas.*

Exemples 37

1. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto e^x + \ln(1+x)$. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0, on peut donc écrire leur DL en 0 à l'ordre 2 :

e^x = ... *et* $\ln(1+x)$ = ...

$f(x)$ = ...

On remarque que la partie polynomiale du DL en 0 à l'ordre 2 de f est un polynôme de degré 1. Notons que le DL en 0 à l'ordre 1 de f est donné par $f : x \mapsto 1 + 2x + o(x)$.

2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $g : x \mapsto \cos(x) \times \sqrt{1+x}$. Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sqrt{(1+x)}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de 0, on peut donc écrire leur DL en 0 à l'ordre 2 :

$\cos(x)$ = ... *et* $\sqrt{1+x}$ = ...

En notant $C(x)$ et $D(x)$ les parties polynomiales des DL de f et g on a :

$C(x) \times D(x)$ = ...

= ....

= ....

En tronquant le produit $C(x) \times D(x)$ à l'ordre 2, on obtient : $g(x)$ =................................

3. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{1+x}\ln(1+x)$.. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Remarque 38 *Au Semestre 3, des techniques de calculs plus poussées seront présentées pour calculer la composition et le quotient de DL.*

2.3 Application au calcul de limites

Exemples 39 *1) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$. On a*

$$\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = \frac{\qquad\qquad\qquad}{\qquad\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} = \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad} \xrightarrow[x\to 0]{} \dots\dots\dots\dots$$

2) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x}{x^3}$. ....

....

....

....

3) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x^2}$. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.4 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 40 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en un point $a \in I$*

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + (x-a)^k\epsilon(x),$$

où k est le plus petit entier $\geqslant 2$ tel que le coefficient c_k soit non nul. Alors une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ de f en a est $y = c_0 + c_1(x-a)$. De plus, la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe de $f(x) - y$:

- *Si $c_k(x-a)^k > 0$ alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de sa tangente.*
- *Si $c_k(x-a)^k < 0$ alors $\mathscr{C}_f$ est en dessous de sa tangente.*
- *Si le signe de $c_k(x-a)^k$ change lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$, alors la tangente traverse $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a. On dit que a est un point d'inflexion.*

Exemple 41 *On considère $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 + 1$. Déterminer l'équation de la tangente de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et donner la position de la courbe de f par rapport à sa tangente. On a $\forall x \in \mathbb{R}$*

$f'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, $f''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *donc* $f''(\frac{1}{2}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

et $k = \ldots\ldots$ *On en déduit le DL de f en $1/2$ à l'ordre 2 par la formule de Taylor-Young :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La tangente en $\frac{1}{2}$ a donc pour équation $y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

La position du graphe de f par rapport à y est donnée par le signe de $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $\mathscr{C}_f$ est $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.5 DL des fonctions usuelles en 0 à l'ordre 4

$$\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4).\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(x^4).\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o(x^4).\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+x^4+o(x^4).\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+x^4+o(x^4).\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4).\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4).\\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+o(x^4).\\
\arctan(x) &= x-\frac{x^3}{3}+o(x^4).\\
\forall\alpha\in\mathbb{R},\ (1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!}x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

L1 MCPI 2019-2020

Analyse et probabilités

Planche 2

Développements limités

Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

Exercice 1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a les relations suivantes :

1. $\dfrac{2}{x(x+1)} = O(\dfrac{1}{x^2})$.
2. $\dfrac{2}{x} = O(x)$.
3. $x^2 + \sin(x) = O(x^2)$.

Exercice 2. Ordonner les fonctions suivantes définies sur $]0,+\infty[$ selon la relation de comparaison petit o au voisinage de $+\infty$:

$$f_1 : x \mapsto x^2 e^x,\ f_2 : x \mapsto x + x^2,\ f_3 : x \mapsto \frac{x^2}{\ln(x)} \text{ et } f_4 : x \mapsto \frac{e^x}{x\ln(x)}.$$

Exercice 3. Soient f, g, φ et ψ des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto x^3 + 1,\ g : x \mapsto x^4 + 1, \varphi : x \mapsto x^3 - 3x \text{ et } \psi : x \mapsto x^3.$$

1. Montrer que $f \sim g$ en 0.
2. Montrer que $\ln(f)$ et $\ln(g)$ sont définies sur $]-1,\infty[$ et que $\ln(f) \not\sim \ln(g)$ en 0.
3. Montrer que $\varphi \sim \psi$ en $+\infty$.
4. Montrer que $e^\varphi \not\sim e^\psi$ en $+\infty$.

Exercice 4. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, et f, g deux fonctions définies dans un voisinage ϑ de a. Montrer que si g ne s'annule pas sur ϑ (sauf éventuellement en a) alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exercice 5. Soient $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ deux fonctions telles que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $\ln(f(x)) \underset{+\infty}{\sim} \ln(g(x))$.

Exercice 6.

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 2 des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \cos(x),\ g :\ x \mapsto e^{-x},\ h : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \varphi : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

2. En déduire le DL en 0 à l'ordre 2 des fonctions $f+g$, $f \times g$, $h+\varphi$, $h \times \varphi$ et $\varphi \times f$.

Exercice 7.

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto e^{2x-x^2}$.
2. En déduire le DL en 0 à l'ordre 2 des fonctions $4f$, f^2 et f^3.

Exercice 8.

1. Donner le DL en 1 à l'ordre 2 de la fonction $g : x \mapsto x^3 - 9\sqrt{x} + 14x + 3$.
2. Donner le DL en 2 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
3. Donner le DL en -1 à l'ordre 6 du polynôme $P : x \mapsto x^4 - 1$. Peut-on avoir une expression exacte du reste de ce DL ?

Exercice 9.

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \sin(2x) - \tan(x)$.
2. En déduire le DL en 0 à l'ordre 2 de $g : x \mapsto \dfrac{\sin(2x) - \tan(x)}{x}$.

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto e^x - \frac{1}{1+x}, \quad g : x \mapsto x\cos(2x) \text{ et } h : x \mapsto \cos(x)\sin(2x),$$

donner une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 0 puis déterminer la position de la tangente par rapport à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 0.

Exercice 11. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Exercice 12. Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f admet un DL en un point a à l'ordre n si et seulement si $g : x \mapsto f(x+a)$ admet un DL en 0 à l'ordre n.

♣ **Exercice 13.**

1. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \sqrt{1 + 2\cos(x)}$.
2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $\varphi : x \mapsto \exp(\sqrt{1 + 2\cos(x)})$.
3. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $h : x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$.

♣ **Exercice 14.**

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $\varphi : x \mapsto \dfrac{e^x}{1+x}$.
2. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$.
3. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $g : x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
4. En déduire le DL en 0 à l'ordre 3 de $f+g$, $f \times g$, $f + \varphi$, et $f \times \varphi$.

♣ **Exercice 15.**

1. Calculer la limite de $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)}$ lorsque x tend vers 1.
2. Calculer la limite de $\dfrac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2}$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.
3. Calculer la limite de $\dfrac{2\tan(x) - \tan(2x)}{x\sin^2(x)}$ lorsque x tend vers 0.