

Chapitre 3 : Développements limités

Table des matières

1 Développement limité	2
1.1 Définition et existence	2
1.2 Propriétés	4
1.3 DL des fonctions usuelles en 0 à l'ordre n	5
2 Opérations sur les développements limités	6
2.1 Somme et produit	6
2.2 Composition	8
2.3 Quotient	8
3 Applications des développements limités	11
3.1 Calcul de limites	11
3.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente	11
4 Développement asymptotique	12
A Exercices	14

Dans ce chapitre, pour n'importe quelle fonction, nous allons trouver le polynôme de degré n qui approche le mieux la fonction autour d'un point. Plus précisément, on cherchera à décomposer toute fonction suffisamment régulière f autour d'un point a donné sous la forme :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

où T_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n et R_n est une fonction qui vérifie $\lim_{x \rightarrow a} R_n(x) = 0$. Décomposer de cette façon une fonction autour d'un point a , c'est faire un développement limité (DL) de cette fonction au point a à l'ordre n . Le polynôme T_n est appelé partie polynomiale du DL et la fonction R_n est appelée le reste du DL.

Notations : Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert¹, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}^*$.

— Si f est dérivable et si la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f . Plus généralement, on note pour tout n dans \mathbb{N}

$$f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'' \dots \text{ et } f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

— f est de classe \mathcal{C}^0 sur I si f est continue sur I . On note $f \in \mathcal{C}^0(I)$.

— f est de classe \mathcal{C}^n sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I . On note $f \in \mathcal{C}^n(I)$.

— f est de classe \mathcal{C}^∞ sur I si $\forall n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{C}^n(I)$. On note $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$. On remarquera que pour tout n dans $\mathbb{N}, \mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$.

— Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on définit la factorielle de n par $n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$ avec la convention $0! = 1$.

Remarques

1) Pour tout n dans \mathbb{N} , on a les inclusions $\mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$.

2) Pour tout n dans \mathbb{N} , $n! = (n-1)! \times n$.

1 Développement limité

1.1 Définition et existence

Soient I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité au point a et à l'ordre n si il existe $(n+1)$ réels c_0, c_1, \dots, c_n et une fonction $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$ tels que pour tout x dans I

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \dots + c_n(x-a)^n}_{\text{Partie polynomiale du DL}} + \underbrace{(x-a)^n \epsilon(x)}_{\text{Reste du DL}}.$$

Proposition Soient I un intervalle ouvert et $a \in I$. Si f est de classe \mathcal{C}^n sur I alors f admet un DL au point a à l'ordre n , qui provient de la formule suivante dite de Taylor-Young :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x),$$

où la fonction $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\lim_{x \rightarrow a} \epsilon(x) = 0$.

Remarque Le DL d'une fonction f au point 0 à l'ordre n s'écrit de la façon suivante à l'aide de la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

1. C'est à dire de la forme $] -\infty, a[$, $]a, b[$ ou $]b, +\infty[$ de \mathbb{R} , avec $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

Exemples

1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés. Donner le DL au point a et à l'ordre n de la fonction $f : x \mapsto e^x$.

$$f(x) = \dots \Rightarrow f(a) = \dots, \quad f'(x) = \dots \Rightarrow f'(a) = \dots,$$

$$f''(x) = \dots \Rightarrow f''(a) = \dots, \quad f^{(n)}(x) = \dots \Rightarrow f^{(n)}(a) = \dots$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$$

$$= \dots$$

2. Donner le DL de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ au point 0 et à l'ordre 4.

$$f(x) = \dots \Rightarrow f(0) = \dots,$$

$$f^{(3)}(x) = \dots \Rightarrow f^{(3)}(0) = \dots,$$

$$f'(x) = \dots \Rightarrow f'(0) = \dots,$$

$$f^{(4)}(x) = \dots \Rightarrow f^{(4)}(0) = \dots$$

$$f''(x) = \dots \Rightarrow f''(0) = \dots,$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + x^4 \epsilon(x)$$

$$= \dots$$

$$= \dots$$

Les premiers polynômes de Taylor du DL de f en 0 sont :

$$T_0(x) = \dots, \quad T_1(x) = \dots, \quad T_2(x) = \dots, \quad T_3(x) = \dots, \quad T_4(x) = \dots$$

T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 sont appelés respectivement polynômes de Taylor d'ordre 0, 1, 2, 3 et 4.

Notation : Le terme $(x-a)^n \epsilon(x)$ où $\epsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ est souvent noté $o_a((x-a)^n)$ (se prononce « petit o_a » de $(x-a)^n$). Cela signifie que $x \mapsto o_a((x-a)^n)$ est une fonction qui vérifie la propriété :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o_a((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0.$$

La notation « petit o_a » simplifie beaucoup les écritures. Lorsque $a = 0$, on écrit « o » plutôt que « o_0 ».

Exemples 1. Pour tout x dans \mathbb{R} , x^3 peut s'écrire $x^3 = o(x^2)$. En effet, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

2. Le reste $x^n \epsilon(x)$ du DL d'une fonction f au point 0 à l'ordre n peut aussi s'écrire $x^n \epsilon(x) = o(x^n)$.

1.2 Propriétés

Proposition *Si une fonction f admet un DL en un point, alors ce DL est unique.*

Proposition

. Si f est paire alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (c'est à dire : $x^0, x^2, x^4, \dots, x^{2n}, n \in \mathbb{N}$).

. Si f est impaire alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés impairs (c'est à dire : $x, x^3, x^5, \dots, x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$).

Exemple On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Elle admet donc un DL en 0 à l'ordre 5 que nous allons déterminer. Pour tout x proche de 0, on a :

$$f(x) = \dots \Rightarrow f(0) = \dots, \quad f'(x) = \dots \Rightarrow f'(0) = \dots,$$

$$f^{(2)}(x) = \dots \Rightarrow f^{(2)}(0) = \dots, \quad f^{(3)}(x) = \dots \Rightarrow f^{(3)}(0) = \dots,$$

$$f^{(4)}(x) = \dots \Rightarrow f^{(4)}(0) = \dots, \quad f^{(5)}(x) = \dots \Rightarrow f^{(5)}(0) = \dots,$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + f^{(5)}(0)\frac{x^5}{5!} + x^5\epsilon(x)$$

=

.....

.....

.....

Commentaire : Comme f est paire, la partie polynomiale de son DL ne contient que des monômes de degrés pairs comme annoncé dans la proposition.

1.3 DL des fonctions usuelles en 0 à l'ordre n

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n).$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}).$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6).$$

Proposition Une fonction f admet un DL au voisinage d'un point a si et seulement si la fonction $x \mapsto f(x+a)$ admet un DL au voisinage de 0.

Exemples

1. Donner le DL de $f : x \mapsto e^x$ en 1 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, elle admet donc un DL en tout point de \mathbb{R} , à tout ordre $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout x proche de 1, on a

$$\begin{aligned} e^x &= e^{x-1+1} \\ &= e^1 \times e^{x-1} \\ &= e \times e^h \text{ en posant } h = \dots\dots\dots, \text{ si } x \text{ est proche de } 1, \text{ alors } h \text{ est proche de } \dots\dots \\ &= e \times \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

2. Donner le DL de $g : x \mapsto \sin(x)$ en $\frac{\pi}{2}$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, elle admet donc un DL en tout point de \mathbb{R} , à n'importe quel ordre $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout x proche de $\frac{\pi}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(h) \text{ en posant } h = \dots\dots\dots \text{ proche de } \dots \text{ lorsque } x \text{ proche de } \dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

2 Opérations sur les développements limités

2.1 Somme et produit

Définition Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ avec $n < p$. Tronquer un polynôme de degré p à l'ordre n consiste à conserver seulement les monômes de degrés $\leq n$.

Exemples

1. Tronquer le polynôme $P : x \mapsto x^8 + 2x^7 - 3x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 1$ à l'ordre 5. On notera T_5 le polynôme obtenu. $T_5(x) = \dots\dots\dots$

2. Tronquer le polynôme $(x + 2x + 4x^2)(1 + x + x^3)$ à l'ordre 2. On notera $T_2(x)$ le polynôme obtenu.

$$\begin{aligned} (x + 2x + 4x^2)(1 + x + x^3) &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

On a donc $T_2(x) = \dots\dots\dots$

Proposition On considère deux fonctions f et g qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \text{ et } g(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

Alors :

• $f + g$ admet un DL en 0 à l'ordre n qui est donné par :

$$f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + \dots + (c_n + d_n)x^n + x^n\epsilon(x),$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$.

$f \times g$ admet un DL en 0 à l'ordre n qui est donné par

$$f(x) \times g(x) = T_n(x) + x^n \epsilon(x),$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ et $T_n(x)$ est le polynôme

$$(c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) \times (d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n)$$

tronqué à l'ordre n .

Exemples

1. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto e^x + \ln(1+x)$. Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ sont de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0, on peut donc écrire leur DL en 0 à l'ordre 2 :

$$e^x = \dots \text{ et } \ln(1+x) = \dots$$

$$f(x) = \dots = \dots$$

2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de $g : x \mapsto \cos(x) \times \sqrt{1+x}$. Les fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sqrt{1+x}$ sont de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de 0, on peut donc écrire leur DL en 0 à l'ordre 2 :

$$\cos(x) = \dots \text{ et } \sqrt{1+x} = \dots$$

En notant $C(x)$ et $D(x)$ les parties polynomiales des DL de f et g on a :

$$C(x) \times D(x) = \dots = \dots$$

En tronquant le produit $C(x) \times D(x)$ à l'ordre 2, on obtient : $g(x) = \dots$

3. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction $h : x \mapsto \sqrt{1+x} \ln(1+x)$.

.....

2.2 Composition

Proposition On considère deux fonctions f et g qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n}_{=C(x)} + x^n \epsilon_1(x) \text{ et } g(x) = \underbrace{d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n}_{=D(x)} + x^n \epsilon_2(x),$$

avec $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0$.

Si $g(0) = 0$ (c'est à dire $d_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $C(D(x))$.

Remarque De façon plus générale, si g admet un DL en 0 à l'ordre n et si f admet un DL en $g(0)$ à l'ordre n alors $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n . Il est obtenu en remplaçant le DL de g dans celui de f et en ne gardant que les termes de degrés inférieurs ou égaux à n .

Exemple Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de la fonction $h : x \mapsto \cos(\ln(1+x))$. On pose ici

$f : u \mapsto \cos(u)$ et $g : x \mapsto \ln(1+x)$. On a bien

$$(f \circ g)(x) = \dots = \dots$$

et $g(0) = \dots = \dots$, $f \circ g$ admet donc un DL en 0 à l'ordre 2. On écrit le DL en 0 à l'ordre 2 de f et g :

$$f(u) = \cos(u) = \dots \text{ et } g(x) = \ln(1+x) = \dots$$

donc les parties polynomiales du DL en 0 à l'ordre 2 de f et g sont respectivement :

$$C(u) = \dots \text{ et } D(x) = \dots$$

$$C(D(x)) = \dots = \dots$$

$$= \dots = \dots$$

Le polynôme tronqué à l'ordre 2 de $C(D(x))$ est donné par $T_2(x) = \dots$ et

finalement le DL de h en 0 à l'ordre 2 est donné par $h(x) = \dots$

2.3 Quotient

On considère deux fonctions f et g qui admettent des DL en 0 à l'ordre n :

$$f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n + x^n \epsilon_1(x) \text{ et } g(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n + x^n \epsilon_2(x), \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0.$$

Pour calculer le DL du quotient $\frac{f}{g}$ nous allons utiliser le DL de

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots + (-1)^n u^n + o(u^n)$$

et la formule pour la composition de DL. On a 3 cas possibles :

Cas 1 : Si $d_0 = 1$, on pose $u = d_1x + \dots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$ et le quotient s'écrit $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{1+u}$.

Cas 2 : Si $d_0 \neq 0$ et $d_0 \neq 1$, alors on se ramène au cas précédent en écrivant

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0} \times \frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0}x + \dots + \frac{d_n}{d_0}x^n + \frac{x^n\epsilon_2(x)}{d_0}}$$

Cas 3 : Si $d_0 = 0$ alors on factorise par x^k (pour un certain k) afin de se ramener à l'un des cas précédents.

Exemples 1. Calculer le DL de $h : x \mapsto \tan(x)$ en 0 à l'ordre 3. On pose $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$. On écrit le DL de f et g en 0 à l'ordre 3 :

$$f(x) = \sin(x) = \dots = B(x) + o(x^3) \text{ et } g(x) = \cos(x) = \dots$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\dots}$$

$$= \frac{1}{1+u} \text{ en posant } u = \dots \text{ dont la partie polynomiale est } D(x) = \dots$$

$$= \dots = C(u) + o(\dots)$$

$$C(D(x)) = \dots = \dots$$

En tronquant $C(D(x))$ à l'ordre 3 on obtient le polynôme $T_3(x)$ donné par $T_3(x) = \dots$

$$\frac{1}{\cos(x)} = T_3(x) + o(x^3) = \dots$$

$$B(x) \times T_3(x) = \dots = \dots$$

En tronquant $B(x) \times T_3(x)$ à l'ordre 3 on obtient le polynôme $\tilde{T}_3(x)$ donné par

$$\tilde{T}_3(x) = \dots \text{ et finalement } h(x) = \tilde{T}_3(x) + o(x^3) = \dots$$

2. Calculer le DL de $h : x \mapsto \frac{1+x}{2+x}$ en 0 à l'ordre 4. On pose pour tout x dans \mathbb{R} $f(x) = 1+x$ et $g(x) = 2+x$. f et g sont des polynômes de degré et on a :

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+u} \text{ en posant } u = \dots\dots\dots \text{ lorsque } x \text{ est proche de } 0, u \text{ est proche de } \dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{1+u} = \dots\dots\dots$$

On remplace à présent u dans la partie polynomiale par et le reste $o(u^4)$ par $o(\dots\dots)$:

$$\frac{1}{2+x} = \dots\dots\dots$$

comme on veut un DL à l'ordre on ne garde que les termes de degrés \leq

$$= \dots\dots\dots$$

Finalemment

$$h(x) = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

3. Calculer le DL de $h : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\text{sh}(x)}$ en 0 à l'ordre 3. On a

$$\sin(x) = \dots\dots\dots = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + x^4\epsilon_1(x)$$

$$\text{sh}(x) = \dots\dots\dots = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + x^4\epsilon_2(x)$$

Comme $d_0 = \dots\dots\dots$ et $c_1, d_1 \neq 0$ on va faire un DL de $\sin(x)$ et $\text{sh}(x)$ à l'ordre $3+1=4$. En effet, Le premier terme du DL de $\text{sh}(x)$ est de degré 1, on a donc factorisé le dénominateur par x^1 . Comme on vise un DL d'ordre 3, on fait un DL d'ordre $3+1$ car on sait que l'on va diviser par x et perdre un ordre.

$$\frac{\sin(x)}{\text{sh}(x)} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ en posant } u = \dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{1+u} = \dots = \dots$$

$$= \dots$$

$$\frac{\sin(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \dots$$

$$= \dots = \dots$$

3 Applications des développements limités

3.1 Calcul de limites

On cherche à calculer $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Si f admet un DL en a à l'ordre n , alors

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} (c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x)) \\ &= c_0. \end{aligned}$$

Exemple Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x}$. On a

$$\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x} = \dots = \dots \xrightarrow{x \rightarrow 0} \dots$$

3.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en un point $a \in I$

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + (x-a)^k \epsilon(x),$$

où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient c_k soit non nul. Alors une équation de la tangente à la courbe de f (notée \mathcal{C}_f) en a est

$$y = c_0 + c_1(x-a)$$

et la position de \mathcal{C}_f par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe de $f(x) - y$:

- Si $c_k(x-a)^k > 0$ alors \mathcal{C}_f est au dessus de sa tangente.
- Si $c_k(x-a)^k < 0$ alors \mathcal{C}_f est en dessous de sa tangente.
- Si le signe de $c_k(x-a)^k$ change lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$, alors la tangente traverse \mathcal{C}_f au point d'abscisse a . On dit que a est un point d'inflexion.

Exemple On considère $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 + 1$. Déterminer l'équation de la tangente de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ et donner la position de la courbe de f par rapport à sa tangente. On a

$$f'(x) = \dots\dots\dots, f''(x) = \dots\dots\dots, \text{ donc } f''\left(\frac{1}{2}\right) = \dots\dots\dots \text{ et } k = \dots\dots$$

On en déduit le DL de f en $1/2$ par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

La tangente en $\frac{1}{2}$ a donc pour équation $y = \dots\dots\dots$

La position du graphe de f par rapport à y est donnée par le signe de $\dots\dots\dots$
 donc \mathcal{C}_f est $\dots\dots\dots$ de y .

4 Développement asymptotique

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$. On dit que f admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe $n + 1$ réels c_0, c_1, \dots, c_n et une fonction $\epsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Exemple On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$. Admet-elle un DL en $+\infty$? On remarque que

$$f(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)$$

$$= \ln(2) + \ln(1 + u) \text{ en posant } u = \dots\dots\dots \text{ quand } x \text{ est proche de } \dots\dots\dots \text{ alors } u \text{ est proche de } \dots\dots\dots$$

$$= \ln(2) + \dots\dots\dots$$

$$= \ln(2) + \dots\dots\dots$$

$$= \ln(2) + \dots\dots\dots$$

Le DL en $+\infty$ d'une fonction nous permet d'avoir une idée du comportement de celle-ci au voisinage de $+\infty$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$ on a $f(x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right) \rightarrow \ln(2)$. Comme le premier terme non nul après $\ln(2)$ dans le DL de f est positif pour x grand, on en déduit que la courbe représentative \mathcal{C}_f de f est au dessus de son asymptote horizontale $y = \ln(2)$.

Remarques

1. Un DL en $+\infty$ s'appelle aussi un développement asymptotique.
2. Dire qu'une fonction $x \mapsto f(x)$ admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n est équivalent à dire que la fonction $h \mapsto f(\frac{1}{h})$ admet un DL en 0^+ à l'ordre n .

Proposition On suppose que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet un DL en $+\infty$ (ou en $-\infty$) donné par

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k} \epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient $\frac{1}{x^k}$ soit non nul.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (a_0x + a_1) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (a_0x + a_1) = 0.$$

La droite d'équation $y = a_0x + a_1$ est une asymptote à la courbe \mathcal{C}_f en $+\infty$ et en $-\infty$. La position de \mathcal{C}_f par rapport à son asymptote est donnée par le signe du terme $\frac{a_k}{x^{k-1}}$.

A Exercices

Remarque Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

Exercice 1.

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 4 des fonctions suivantes

$$f_1 : x \mapsto \cos(x), f_2 : x \mapsto \exp(-x) \text{ et } f_3 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

2. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction $f_4 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
3. Donner le DL en 1 à l'ordre 2 de la fonction $f_5 : x \mapsto x^3 - 9\sqrt{x} + 14x + 3$.
4. Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_6 : x \mapsto e^{2x-x^2}$.
5. ♣ Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_7 : x \mapsto \sqrt[3]{1+x}$.
6. ♣ Donner le DL en 0 à l'ordre 5 de $f_8 : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Exercice 2.

1. Donner le DL en 2 à l'ordre 2 de $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
2. Donner le DL en -1 à l'ordre 7 du polynôme $P : x \mapsto x^4 - 1$.

Exercice 3. Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de $f : x \mapsto \frac{\sin(2x) - \tan(x)}{x}$.

Exercice 4. On considère $f :]-\infty, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

Donner le DL en 0 à l'ordre 3 de f .

Exercice 5.

1. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_1 : x \mapsto \sqrt{1+2\cos(x)}$.
2. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_2 : x \mapsto \exp(\sqrt{1+2\cos(x)})$.
3. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_3 : x \mapsto \ln(1+\sin(x))$.
4. Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_4 : x \mapsto \frac{e^x}{1+x}$.
5. ♣ Calculer le DL en 0 à l'ordre 6 de $f_5 : x \mapsto (\ln(1+x^2))^2$.
6. ♣ Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de $f_6 : x \mapsto \frac{x \ln(1+x^2)}{x^2 + \tan(2x^3)}$.
7. ♣ Calculer le DL en 0 à l'ordre 5 de $f_7 : x \mapsto \frac{\ln(1+x^3)}{x^3}$.
8. ♣ Calculer le DL en 0 à l'ordre 4 de $f_8 : x \mapsto \cos(\sin(x))$.

Exercice 6. Pour chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \exp(x) - \frac{1}{1+x}, \quad g : x \mapsto x \cos(2x) \text{ et } h : x \mapsto \cos(x) \sin(2x),$$

donner une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f en 0 puis déterminer la position de la tangente par rapport à \mathcal{C}_f au voisinage de 0.

Exercice 7. ♣ Pour chacune des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \exp(x) + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } g : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

donner une équation de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f en 0 puis déterminer la position de la tangente par rapport à \mathcal{C}_f au voisinage de 0.

Exercice 8. Donner la limite en 0 de la fonction f définie sur $]0, \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

Exercice 9. Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^2} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan(x) - \tan(2x)}{x \sin^2(x)} \\ & \clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\tan^2(x)} - \frac{1}{x^2} \quad \clubsuit \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin(x)} \end{aligned}$$

Exercice 10.

1. Calculer la limite de $\frac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)}$ lorsque x tend vers 1.
2. Calculer la limite de $\frac{\ln(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2}$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 11.

1. Calculer le DL en $+\infty$ à l'ordre 5 de $f : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$.
2. Calculer le DL en $+\infty$ à l'ordre 2 de $g : x \mapsto (1 + \frac{1}{x})^x$.
3. ♣ Calculer le DL en $+\infty$ à l'ordre 6 de $h : x \mapsto \sqrt{\frac{x^4}{x^2 + 1}}$.

Exercice 12. Calculer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x \quad \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) \quad \clubsuit \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x \quad \clubsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \right)^x \quad \clubsuit \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 13. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer une équation de leurs asymptotes en $\pm\infty$ et préciser la position de leurs graphes par rapport à ces asymptotes.

$$\begin{aligned} & \bullet f : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x + 1}} \quad \bullet g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 2} \quad \bullet h : x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x + 2}} \quad \bullet k : x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{1}{1 + x}\right) \\ & \clubsuit \varphi : x \mapsto (x + 2)^{\frac{1}{x}} \quad \clubsuit \psi : x \mapsto \sqrt[3]{x^3 - x^2} \quad \clubsuit \xi : x \mapsto \frac{1}{x + x^2} + 2 \arctan(x) \end{aligned}$$