

Chapitre 3 : Limites et continuité

1 Rappels sur les fonctions

1.1 Opérations sur les fonctions

Définitions Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de \mathbb{R} . On peut alors définir les fonctions suivantes :

. la somme de f et g est la fonction $f + g : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in U.$$

. le produit de f et g est la fonction $f \times g : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \quad \forall x \in U.$$

. la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ de f est la fonction $\lambda f : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in U.$$

1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définitions Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur une même partie U de \mathbb{R} . Alors :

. $f \geq g$ si

. $f \geq 0$ si

. $f > 0$ si

. f est dite constante sur U si :

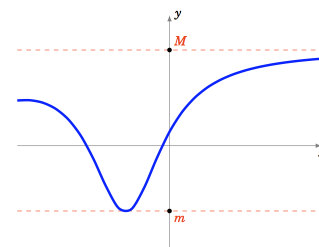
. f est nulle sur U si

. f est majorée si

. f est minorée si

. f est bornée si

(ou de façon équivalente))



1.3 Fonctions croissantes, décroissantes

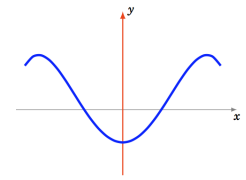
Définitions Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie U de \mathbb{R} . On dit que :

- . f est croissante sur U si
- . f est strictement croissante sur U si
- . f est décroissante sur U si
- . f est strictement décroissante sur U si
- . f est monotone sur U si f est croissante ou décroissante sur U .
- . f est strictement monotone sur U si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur U .

1.4 Parité et périodicité

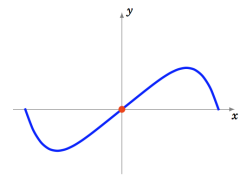
Définitions Soient I un intervalle de \mathbb{R} symétrique par rapport à 0 (c'est à dire de la forme $[-a, a]$ ou $] -a, a[$ ou \mathbb{R}) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur cet intervalle. On dit que :

. f est paire si



Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

. f est impaire si

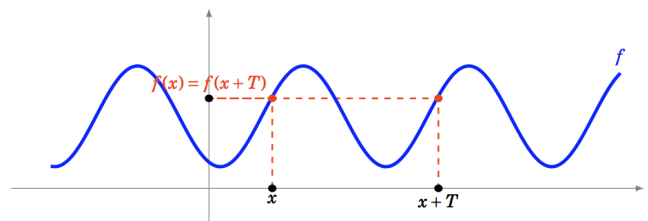


Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine (0,0).

Exemple La fonction carré $x \mapsto x^2$ est paire sur \mathbb{R} alors que la fonction cube $x \mapsto x^3$ est impaire sur \mathbb{R} .

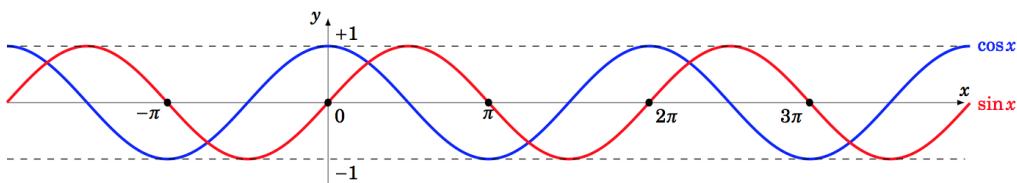
Définition Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et un réel $T > 0$. La fonction f est dite périodique de période T

si



Remarque f est périodique \Leftrightarrow

Exemple Les fonctions cosinus et sinus sont 2π -périodiques :



2 Limites

2.1 Définitions

Dans toute la suite on considère I un intervalle de \mathbb{R} , $\ell \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ un point ou une extrémité de I et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

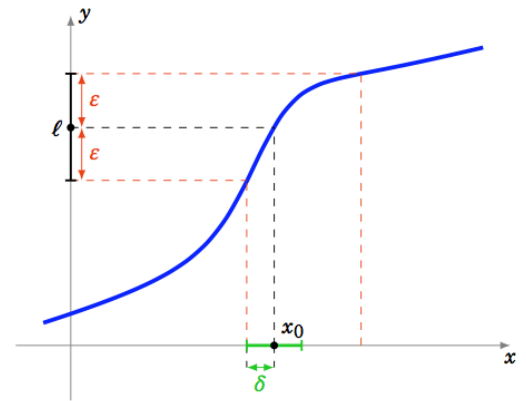
2.1.1 Limite en un point

Définition

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ a pour limite ℓ en x_0 si

On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 .

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell$.



Remarques

1. On a les équivalences suivantes :

.....

2. Attention à l'ordre des quantificateurs très important : on ne peut pas échanger le $\forall \epsilon$ avec le $\exists \delta$ car le δ dépend en général du ϵ .

Exemples

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$. En reprenant les notations de la définition, on a $f : \dots \rightarrow \dots$
 $x \mapsto \dots, \dots,$
 $x_0 = \dots$ et $\ell = \dots$. Soit $\epsilon > 0$. Cherchons $\delta > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$,

.....

Exemple Montrer que $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2}{(x-4)^2} = +\infty$. Soit $A > 0$. Montrons qu'il existe $\delta > 0$ tel que

.....

2.1.2 Limite en l'infini

On suppose ici que I est de la forme $]a, +\infty[$ lorsque l'on s'intéresse à la limite en $+\infty$ de f et de la forme $] -\infty, a[$ lorsque l'on s'intéresse à la limite en $-\infty$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Définitions

— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si

.....

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

— Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f a pour limite ℓ en $-\infty$ si

.....

On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si

.....

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si

.....

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$.

— On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$ si

.....

On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

— On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si

.....

On note alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou encore $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.

Exemples

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1} = 0$ avec $I =]-1, +\infty[$. Il faut montrer que

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x + 4 = +\infty$ avec $I =]-\infty, 0[$. Il faut montrer que

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.1.3 Limite à gauche, limite à droite

On suppose que f est définie sur un ensemble I de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définitions

1. On dit que ℓ est **limite à droite** en x_0 de f si

.....

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ ou encore $\lim_{x \xrightarrow{x > x_0} x_0} f(x) = \ell$.

2. On dit que ℓ est **limite à gauche** en x_0 de f si

.....

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ ou encore $\lim_{x \xrightarrow{x < x_0} x_0} f(x) = \ell$.

Exemple Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$. La fonction est définie sur $I = \dots$. Il faut montrer que

.....

Proposition Si f admet pour limite ℓ en x_0 , alors

.....

Remarque On pourra utiliser la contraposée de ce résultat :

.....

Exemple Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

n'admet pas de limite en 1.

.....

.....

.....

2.2 Propriétés

Proposition Si une fonction a une limite en un point, alors cette limite est unique.

Proposition Soient f et g deux fonctions et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda \times f(x) = \lambda \times \ell$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \ell + \ell'$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = \ell \times \ell'$.
- Si $\ell \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$.
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-$.

Preuve. Voir Semestre 2. ■

Proposition (Limites usuelles)

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x & = \dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x & = \dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) & = \dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) & = \dots\dots \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} & = \dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} & = \dots\dots \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} & = \dots\dots \end{array}$$

Proposition

- Si $f \leq g$, si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$ alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$.
- **Théorème des gendarmes :**

Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$.

.....

 ■

Technique de calcul (à retenir!) Calcul de la limite **en l'infini** d'une fraction de polynômes : elle est égale à la limite du quotient des termes de plus hauts degrés du numérateur et du dénominateur :

1. Le degré du numérateur est plus élevé que celui du dénominateur :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x^3 - 5}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots\dots\dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

2. Le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 3x^3 - 5}{5x^4 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots\dots\dots = \lim_{x \rightarrow -\infty} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

3. Le degré du dénominateur est plus élevé que celui du numérateur :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 2x + 1}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots\dots\dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

RAPPEL : Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F' \rightarrow G$ deux applications telles que l'espace d'arrivée F de f soit inclus dans l'espace de départ F' de g . On définit alors l'**application composée** $g \circ f$ par

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\rightarrow G \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Proposition Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{y \rightarrow \ell} g(y) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell'$.

Exemple Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5x+1}{x^2+3x} = \dots\dots\dots$ car $5x+1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \dots\dots$ et $x^2+3x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \dots\dots$. Ainsi, comme

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = \dots\dots\dots \text{ on en déduit que } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{5x+1}{x^2+3x}} = \dots\dots\dots$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2}\right)$. On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4+2x+1}{5x^3+x^2} = \dots\dots\dots$$

.....

Remarque Il existe des cas où on peut rien dire sur les limites que l'on appelle formes indéterminées :

.....

Exemples Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x - 2}{3x^2 + 2x + 2} = \dots\dots\dots$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 7x + 4} = \dots\dots\dots$

.....

$2x^2 - x - 1 = \dots\dots\dots$ et $3x^2 - 7x + 4 = \dots\dots\dots$

et alors $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - 7x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \dots\dots\dots$

.....

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2})}{x} \dots\dots\dots$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

=

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} = \dots\dots\dots$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x-1})}{\dots\dots\dots} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots\dots\dots \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots \end{aligned}$$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = ?$ La fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$ en revanche elle est bornée :

3 Continuité

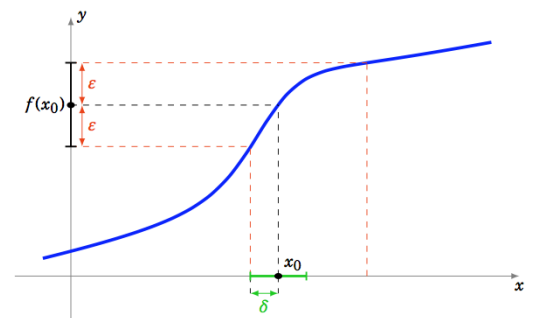
3.1 Définitions

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définitions

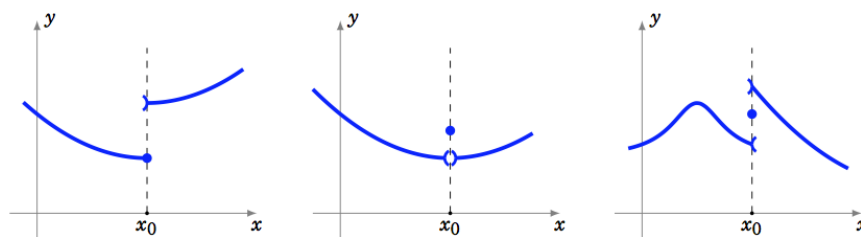
- On dit que f est continue en un point $x_0 \in I$ si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- On dit que f est continue sur I si



Remarques . La continuité de f en un point x_0 signifie que si

. Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est à dire si elle n'a pas de saut. Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



Exemples

1. La fonction $f : x \mapsto 4$ est continue sur $I = \mathbb{R}$. Fixons $x_0 \in I$ et écrivons la définition de la continuité en x_0 :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. La fonction $g : x \mapsto |x|$ est continue sur $I = \mathbb{R}$. Fixons $x_0 \in I$ et écrivons la définition de la continuité en x_0 :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Théorème (*Théorème de la bijection*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Si f est continue et strictement monotone sur I alors

1.
.....
2.
.....
.....

Proposition (*Continuité des fonctions usuelles*) Les fonctions logarithme, exponentielle, puissances, valeur absolue, sinus, cosinus, tangente, arcsinus, arccosinus, arctangente, sinus/cosinus/tangente hyperbolique, argument sinus/cosinus/tangente hyperbolique sont continues sur leurs domaines de définition respectifs.

3.2 Propriétés

Proposition (*Opérations élémentaires*)

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et continues en un point x_0 de I . Alors

- $\lambda.f$ est continue en x_0 , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $f + g$ est continue en x_0 .
- $f \times g$ est continue en x_0 .
- si $f(x_0) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ est continue en x_0 .

Proposition (*Composition de fonction*)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur des intervalles I et J de \mathbb{R} tels que $f(I) \subset J$.

.....
.....

Exemple On considère les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 + 1 \end{matrix} \quad \text{et} \quad g : \begin{matrix} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{matrix} .$$

.....

3.3 Prolongement par continuité

Définitions Soient I un intervalle de \mathbb{R} , x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f est **prolongeable par continuité** en x_0 si

.....

2. On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots & \text{si} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \text{si} \dots\dots\dots \end{cases}$$

.....

Remarque

Exemple La fonction $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{matrix}$$

.....

