Chapitre 4 : Équations différentielles

De nombreux problèmes d'origine physique, économique, biologique conduisent à chercher une fonction y dépendant d'une variable t sachant qu'il existe une relation entre y, t et éventuellement d'autres dérivées successives de y $(y'', ...)$. Une telle relation est appelée équation différentielle :

$$y^2(t) - (y'(t))^2 = 1$$

$$ty(t)y'(t) = y^2(t) - t^2$$

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = te^{-t}\sin(t).$$

Exemple ***: La cinétique chimique :*** *Il s'agit de trouver l'évolution dans le temps de concentrations, de quantités de matière (nombres de moles) ou encore de pressions partielles. Les réactions d'ordre 1 mènent par exemple à l'équation différentielle suivante :*

$$y'(t) = -ky(t),$$

où k une constante donnée et y représente la concentration d'un composé chimique.

L'objectif de ce cours est d'apprendre à résoudre une classe bien précise d'équations différentielles, c'est à dire trouver l'expression de la fonction inconnue y.

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $a, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues données. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du 1er ordre qui sont des équations de la forme :

$$\text{..} \quad t \in I, \tag{1}$$

où l'inconnue du problème est une fonction dérivable notée $y : I \to \mathbb{R}$ qui dépend de la variable t.

. On dit que cette équation est une équation différentielle car elle fait intervenir des dérivées de l'inconnue du problème y.

. On dit qu'elle est du **1er ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **première** de l'inconnue du problème y.

. On dit qu'elle est linéaire car l'équation homogène associée donnée par

$$\text{..} \quad t \in I, \tag{2}$$

possède la propriété de linéarité suivante :

Propriété *Soient* y_1 *et* y_2 *deux solutions de (2), alors pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *la fonction combinaison linéaire de* y_1 *et* y_2 *donnée par*

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

est encore solution de (2). En particulier, la fonction identiquement nulle $y \equiv 0$ *est toujours solution de (2).*

Remarque *Attention, la propriété précédente n'est pas vraie pour les solutions de (1) : si* y_1 *et* y_2 *sont deux solutions de (1), en général,* $\alpha y_1 + \beta y_2$ *n'est pas solution de (1).*

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre à résoudre les équations (1) et (2).

1.1 Équations homogènes $y'(t) - a(t)y(t) = 0$

On dit qu'une équation différentielle de la forme $y'(t) - a(t)y(t) = g(t)$ est **homogène** lorsque l'on considère comme second membre une fonction g identiquement nulle, ce que l'on note $g \equiv 0$.

Définition *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On appelle solution sur* I *de l'équation*

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0, \quad t \in I$$

toute fonction f ....

....

....

Théorème 1 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Toute solution* f *de l'équation*

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0, \quad t \in I$$

est de la forme

$$f(t) = \text{.......................},$$

où $A : I \to \mathbb{R}$ ....

....

Preuve. On démontre l'équivalence en deux temps :
. Pour tout $C \in \mathbb{R}$, la fonction $f(t) = Ce^{A(t)}$ est bien solution de l'équation car elle vérifie

$f'(t) - a(t)f(t) =$ ....

....

. Réciproquement, si f est une solution de l'équation, on pose pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = f(t)e^{-A(t)}$. Alors, φ est dérivable et vérifie $\forall t \in I$

$\varphi'(t) =$..

....

. . . .

. . . .

. . . .

. . . . ■

Exemple *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'(t) - 3y(t) = 0.$$

La fonction $a : t \mapsto$ .... *est continue sur* $I =$ .... *et admet pour primitive* $A : t \mapsto$ .... *Ainsi toute solution est définie sur* .... *et est de la forme*

$$f(t) = \text{...............................}$$

1.2 Équations non homogènes $y'(t) - a(t)y(t) = g(t)$

Définition *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. On appelle solution sur* I *de l'équation*

$$y'(t) - a(t)y(t) = g(t), \quad t \in I$$

toute fonction f . . . .

. . . .

. . . .

Théorème 2 *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $a, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues. Si* f_p *est une solution particulière de l'équation*

$$y'(t) - a(t)y(t) = g(t), \quad t \in I \tag{$\star$}$$

alors toute solution f *de l'équation* $(\star)$ *est de la forme*

$$f(t) = \text{...},$$

où $A : I \to \mathbb{R}$ . . . .

. . . .

Preuve. Soient f et f_p deux solutions de l'équation $(\star)$, on pose $\varphi =$ .... Alors φ est dérivable et vérifie $\forall t \in I$

$\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)$=..

=..

=..

=..

. . . .

. . . .

. . . . ■

Remarque *Ce théorème nous dit que tout solution de l'équation* $(\star)$ *se décompose comme somme d'une solution particulière de* $(\star)$ *et d'une solution de l'équation homogène associée à* $(\star)$.

Exemple *On considère l'équation différentielle*

$$y'(t) + 2y(t) = 4. \qquad (\star)$$

Chercher une solution particulière f_p *sous la forme* $f_p(t) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ *puis résoudre l'équation différentielle* $(\star)$. . . . .

. . . .

. . . .

Cherchons une solution de l'équation homogène

$$y'(t) + 2y(t) = 0 \Leftrightarrow y'(t) - (-2)y(t) = 0.$$

La fonction $a : t \mapsto$ .... *est continue sur* $I =$ .... *est admet pour primitive* $A : t \mapsto$ ...., *toute solution* f_h *de l'équation homogène est donc de la forme*

$$f_h(t) = \text{.....................................}$$

Finalement, toute solution de l'équation $(\star)$ *est définie sur* .... *et est de la forme*

$$f(t) = \text{..}$$

1.3 Recherche de solutions particulières $y'(t) - a(t)y(t) = g(t)$

1.3.1 Cas particuliers : si $a(t) = a \in \mathbb{R}$

Selon la forme du second membre g, on peut chercher des solutions particulières spécifiques.

- g est un polynôme de degré n :
  On cherche une solution particulière sous la forme $f_p(t) =$ .... où

  $$P \text{ ....} \begin{cases} \text{...} \\ \\ \text{...} \end{cases}$$

- $g(t) = e^{\lambda t}Q(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et Q est un polynôme de degré n :
  On cherche une solution particulière sous la forme $f_p(t) =$ .... où

  $$P \text{ ....} \begin{cases} \text{...} \\ \\ \text{...} \end{cases}$$

- $g(t) = e^{\lambda t}(\alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t))$, $\lambda, \alpha, \beta, \omega \in \mathbb{R}$:
  On cherche une solution particulière sous la même forme, *i.e*

  $$f_p(t) = \text{..}$$

- g est une somme de plusieurs fonctions du type précédent :
  Si on considère le cas où g se décompose en somme de deux fonctions $g = g_1 + g_2$ avec g_1 et g_2 correspondant à un cas précédent, ...
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  ....
  Si g est la somme de n fonctions, on procède de la même façon en cherchant n solutions particulières aux n équations correspondantes.

Exemple *Résoudre l'équation différentielle*

$$y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t}.$$

Les fonctions $a : t \mapsto$ .... *et* $g : t \mapsto$ .... *sont continues sur* $I =$ .... *On commence par résoudre l'équation homogène :*

....

La fonction a *admet pour primitive* $A : t \mapsto$ ...., *ainsi toute solution de l'équation homogène s'écrit*

$$f_h(t) = \text{................................}$$

On cherche à présent une solution particulière sous la forme $f_p(t) =$ .... *On a donc*

.... $\Leftrightarrow$ ....,

ainsi si λ *vérifie* ...., $f_p(t) =$ .... *est bien une solution particulière. On a donc* $f_p(t) =$ .... *Finalement, toute solution de l'équation de départ est définie sur* .... *et s'écrit sous la forme*

$$f(t) = \text{..}$$

1.3.2 Méthode générale : variation de la constante

....
....
....

$$\text{...}, \quad t \in I. \qquad (\star)$$

L'idée de la méthode est la suivante : on sait que les solutions f de l'équation homogène

....

sont de la forme $f(t) =$ .... où ....
....

On va donc chercher une solution particulière f_p de l'équation $(\star)$ sous la forme

$$f_p(t) = \text{..........................}$$

où φ est ....

La constante C est remplacée par la fonction φ, d'où le nom de « variation de la constante ». On a alors

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, f_p'(t) - a(t)f_p(t) = g(t) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{..} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{..} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{..} \\
&\Leftrightarrow \quad \text{..}
\end{aligned}$$

. . . .

Ceci nous donne l'expression d'une solution particulière f_p de $(\star)$:

$$f_p(t) = \text{..}, \forall t \in I.$$

On peut résumer cela dans le résultat suivant :

Théorème 3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.*

. . . .

....

....

$$f(t) = \text{..},$$

où $A : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $a : I \to \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ est une constante.

Remarque *Avant de se lancer dans les calculs de la méthode de la variation de la constante, on commence par regarder s'il n'existe pas des solutions particulières évidentes à notre équation. Par exemple si on considère l'équation suivante*

$$y'(t) - 2y(t) = 2,$$

sur $I =$ ...., on voit bien qu'une solution particulière de cette équation est donnée par la fonction $f_p(t) =$ ...., $\forall t \in \mathbb{R}$. La fonction $a : t \mapsto$ .... est continue sur I et admet pour primitive $A : t \mapsto$ ....., ainsi toute solution de cette équation sera de la forme

$$f(t) = \text{..}$$

Exemple *Résoudre sur* $I =]0, +\infty[$ *l'équation différentielle*

$$(1 + t^2)y'(t) + ty(t) - 2t = 0. \tag{$\star$}$$

Écrivons $(\star)$ *sous la forme* .... *:*

$$\forall t \in I, (\star) \Leftrightarrow \text{..},$$

les fonctions $a : t \mapsto$ .... *et* $g : t \mapsto$ .... *sont continues sur* I*. La fonction* a *admet pour primitive*

$A(t) =$ ....

....

....

....

$$f_h(t) = \text{..}$$

Il nous reste à trouver une solution particulière de l'équation $(\star)$ *: on la cherche sous la forme*

$$f_p(t) = \text{...............................}$$

Alors

$$\forall t \in I, f_p'(t) = \text{...}$$

et donc

$$f_p'(t) + \frac{t}{1+t^2} f_p(t) = \frac{2t}{1+t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \text{...}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{...}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{...}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{...}$$

Ainsi $f_p(t) =$ .... *convient.* . . . .

$$f(t) = \text{..}$$

1.4 Équations avec conditions initiales

Il s'agit d'équations de la forme

$$\begin{cases} \text{..} \\ \\ \text{..} \end{cases}$$

....Cette information y_0 sur la valeur de la solution y en $t = 0$ nous permet d'identifier les constantes $C \in \mathbb{R}$ apparaissant dans la forme des solutions de l'équation.

Exemple *Résoudre l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) &= 2e^{-t} \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

Nous avons vu que toute solution de l'équation . . . .

$$f(t) = \text{..}$$

Comme $f(0) =$. . . . .

. . . .

. . . .

$$f(t) = \text{..}$$

Remarque *Il arrivera que la condition initiale ne porte pas sur la valeur de la solution en* $t = 0$ *mais en d'autres valeurs de* $t \in I$*, par exemple : l'équation différentielle*

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) &= 2e^{-t} \\ y(1) &= 0, \end{cases}$$

admet pour unique solution $f(t) = e^{-t} - e^{2-3t}$. *En effet, comme précédemment,* $f(t) = Ce^{-3t} + e^{-t}, C \in \mathbb{R}$ *et* $f(1) = 0 \Leftrightarrow$ . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants qui sont des équations de la forme :

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad t \in I. \tag{3}$$

. On dit que cette équation est du **second ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **seconde** de l'inconnue du problème y.

. On dit qu'elle est à coefficients constants car nous ne considèrerons que des coefficients constants devant les membres y, y' y'' de l'équation.

Nous allons voir comment résoudre cette équation (3) : dans le cas homogène *i.e* lorsque $g \equiv 0$ puis dans le cas non homogène lorsque $g : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non-identiquement nulle.

2.1 Quelques rappels

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On considère dans la suite le polynôme de degré 2 suivant :

$$P(z) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

. . . .

. . . .

On a le résultat suivant :

Théorème *Tout polynôme de degré 2 possède au plus deux racines données par*
. Si $\Delta = 0$, on a une racine double réelle $x = \dfrac{-b}{2a}$.
. Si $\Delta > 0$ on a deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

. Si $\Delta < 0$, on a deux racines complexes ***conjuguées*** *:*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La factorisation du polynôme est donnée par la formule, en notant z_1, z_2 les racines du polynôme

$$az^2 + bz + c = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.2 Équations homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$

Définition *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On appelle solution de l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

toute fonction f . . . .

. . . .

. . . .

Définition *Soient $a, b \in \mathbb{R}$.* ....

....,

le polynôme noté P_c défini par

$$P_c(z) = \text{...}$$

Théorème 4 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On considère P_c le polynôme caractéristique associé à l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0. \qquad (\star)$$

- *.., toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$$f(t) = \text{...}$$

- *..., toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$$f(t) = \text{...}$$

- *..., toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$$f(t) = \text{...}$$

Remarque *Lorsque P_c a deux racines complexes distinctes z_1 et z_2, les solutions de $(\star)$ peuvent aussi s'écrire sous la forme*

$$f(t) = \text{...}$$

grâce à l'égalité

$$e^{\alpha+i\beta} = \text{...}$$

2.3 Équations non homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Définition *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle solution sur I de l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), \quad t \in I$$

toute fonction f ....

....

Théorème 5 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On considère P_c le polynôme caractéristique associé à l'équation $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ et f_p une solution particulière de l'équation*

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t). \qquad (\star)$$

. *Si P_c a une racine double $\alpha \in \mathbb{R}$, toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$f(t) =$ ....

. *Si P_c a deux racines réelles distinctes $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$f(t) =$ ....

. *Si P_c a deux racines complexes distinctes $z_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, $z_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), toutes les solutions de l'équation $(\star)$ sont de la forme*

$f(t) =$ ....

2.4 Recherche de solutions particulières $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), a, b \in \mathbb{R}$

- g .... :

  On cherche une solution particulière sous la forme $f_p(t) =$ .... où

  P .... $\begin{cases} \text{.......... si } b \neq 0 \\ \text{.......... si } b = 0 \text{ et } a \neq 0. \\ \text{.......... si } a = b = 0. \end{cases}$

- .... :

  On cherche une solution particulière sous la forme $f_p(t) =$ .... où

  P .... $\begin{cases} \text{.......... si ....} \\ \text{.......... si ....} \\ \text{.......... si ....} \end{cases}$

- g est une somme de plusieurs fonctions du type précédent : on raisonne comme pour une équation du 1er ordre.