Chapitre 4 : Introduction à l'analyse combinatoire

Table des matières

1 Cardinal d'un ensemble fini

Proposition 1
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Il existe une bijection de $\{1, ..., n\}$ sur $\{1, ..., p\}$ si et seulement si $p = n$.

Preuve. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

(P_n) : ....

Initialisation : La propriété est clairement vraie pour $n = 1$.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, supposons (P_n) vraie et montrons que (P_{n+1}) l'est aussi. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Remarque 2 *Cette proposition signifie que deux ensembles ayant un nombre fini d'éléments sont en bijection si et seulement si ils contiennent le même nombre d'éléments.*

Définition 3 *Soit A un ensemble.* ....

....

....

....

Remarque 4 *Le cardinal d'un ensemble fini est aussi appelé le nombre d'éléments de cet ensemble. Dénombrer un ensemble fini consiste à déterminer son cardinal.*

Exemples 5 *1.* $A = \{pile, face\}$ ....

....

2. $\mathbb{N}$ *n'est pas un ensemble fini.*
3. Par définition le cardinal de l'ensemble vide est 0. ....

....

Définition 6 *On dit que deux ensembles A et B sont disjoints si $A \cap B = \varnothing$.*

Proposition 7 *Soient A et B deux ensembles finis disjoints. Alors $A \cup B$ est fini et*

$$\textit{Card}(A \cup B) = \textit{Card}(A) + \textit{Card}(B).$$

Preuve. On pose $n = \text{Card}(A)$ et $p = \text{Card}(B)$. ....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Proposition 8 *Soient A et B deux sous-ensembles finis d'un ensemble E. Si $B \subset A$ alors on définit $A \setminus B = \left\{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\right\}$ et on a*

$$\textit{Card}(A \setminus B) = \textit{Card}(A) - \textit{Card}(B).$$

Preuve. On remarque que B et $A \setminus B$ sont disjoints et que $A = B \cup (A \setminus B)$. En appliquant la Proposition 7 on obtient

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(B \cup (A \setminus B)) = \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(A \setminus B)$$

d'où le résultat. ∎

> **Proposition 9** *Soient A et B deux ensembles finis. Alors*
>
> $$\mathit{Card}(A \cup B) = \mathit{Card}(A) + \mathit{Card}(B) - \mathit{Card}(A \cap B).$$

Preuve. On remarque que $A \cup B = A \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big)$ la dernière union étant disjointe, il suffit d'appliquer la Proposition 7. ∎

> **Proposition 10** *Soient A un ensemble fini et $B \subset A$ un sous-ensemble de A. Alors B est un ensemble fini et $\mathit{Card}(B) \leqslant \mathit{Card}(A)$.*

Preuve. Raisonnons par récurrence sur la propriété suivante définie pour $n \in \mathbb{N}$

$$(P_n) : \big(B \subset A \text{ et } \mathrm{Card}(A) = n\big) \Rightarrow \mathrm{Card}(B) \leqslant n.$$

Initialisation : P_0 est vraie car si $\mathrm{Card}(A) = 0$ alors $A = \varnothing$ d'où $B = \varnothing$ et $\mathrm{Card}(B) = 0 \leqslant 0$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} l'est aussi. ....

....

....

....

....

....

.... ∎

> **Proposition 11** *Soient A un ensemble fini et $B \subset A$ un sous-ensemble de A. Alors*
>
> $$\mathit{Card}(B) = \mathit{Card}(A) \Rightarrow A = B.$$

Preuve. Voir TD. ∎

Proposition 12 *Soient A et B deux ensembles finis. Alors le produit cartésien*

$$A \times B = \left\{(a,b), a \in A \textbf{ et } b \in B\right\}$$

est fini et

$$\textbf{Card}(A \times B) = \textbf{Card}(A) \times \textbf{Card}(B).$$

Preuve. Voir TD. ∎

Remarque 13 *Le résultat précédent se généralise comme ceci : si $E_1, E_2, ..., E_n$ sont des ensembles finis alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times .... \times E_n$ est fini et*

$$\textbf{Card}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \textbf{Card}(E_i).$$

2 Injectivité, surjectivité et cardinaux

Proposition 14 *Soient E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.*

1. ....

2. ....

3. ....

Preuve.

1. Supposons f injective et notons $F' = f(E) \subset F$. Alors l'application

$$\begin{array}{rcl} g : E & \to & F' \\ x & \mapsto & g(x) = f(x), \end{array}$$

est bijective par construction. Ceci signifie que pour chaque $y \in F'$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = g(x)$. De cette façon, E et F' ont le même cardinal et comme $F' \subset F$ on obtient $\text{Card}(E) = \text{Card}(F') \leqslant \text{Card}(F)$, d'où le résultat.

2. Si f est surjective alors pour tout $y \in F$, il existe au moins un élément x dans E tel que $y = f(x)$ donc $\text{Card}(E) \geqslant \text{Card}(F)$.

3. Si f est bijective alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ par application de 1. et 2.

∎

Proposition 15 *Soient E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Si*

$$Card(E) = Card(F)$$

alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f *est injective.*

(ii) f *est surjective.*

(iii) f *est bijective.*

Preuve. Voir TD. ■

Proposition 16 *(Lemme des tiroirs)* ....

....

....

....

Preuve. Cette proposition semble traduire la non injectivité d'une application. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ■

Remarque 17 *Cette proposition permet aussi d'affirmer que dans un amphi de 400 étudiants, il y a au moins deux étudiants nés le même jour.*

3 Dénombrements remarquables

Définition 18 *Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle factorielle de n le produit des n premiers nombres entiers :*

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n, \quad \textit{avec par convention } 0! = 1.$$

Remarques 19 *1.* ***Attention :*** *$\forall n \geqslant 2$, $2n! \neq (2n)!$. Si on veut faire porter la factorielle sur un produit, il faut bien veiller à mettre des parenthèses pour isoler le produit qui nous intéresse.*
2. On retiendra que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

3.1 Arrangements avec répétition

Proposition 20 *Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, E et F deux ensembles finis avec Card$(E) = k$ et Card$(F) = n$.*

....

....

Remarques 21 *1. n^k est appelé le nombre d'arrangements avec répétition de k éléments parmi n. Il s'agit du nombre de façons de choisir k élément parmi n, avec répétition et en tenant compte de l'ordre.*
2. On remarque que cette proposition nécessite deux ensembles E et F non vides car n et k sont dans $\mathbb{N}^*$. Elle signifie que si l'on note $\mathscr{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F

$$\mathscr{F}(E,F) = \{f : E \to F\},$$

alors Card$\big(\mathscr{F}(E,F)\big) = (\text{Card}(F))^{\text{Card}(E)}$.

Exemples 22 *1. Soit E_1 un ensemble fini avec Card$(E_1) = k \in \mathbb{N}^*$.* ....

....

....

2. Si $E_2 = \{1,2,3,4,6\}$ ....

Preuve. Fixons un ensemble F de cardinal $n = \text{Card}(F) \in \mathbb{N}^*$. Nous allons effectuer une récurrence sur $k = \text{Card}(E)$. Soit (P_k) l'assertion suivante : « Le nombre d'applications d'un ensemble à k éléments vers un ensemble à n éléments est n^k. »

Initialisation : ....

....

....

....

Hérédité : Fixons $k \in \mathbb{N}^*$, supposons que P_k vraie et montrons que P_{k+1} l'est aussi. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... De fait, P_{k+1} est vérifiée, ce qui achève la récurrence. ■

Exemples 23
1. a) Combien de n° de téléphone à 10 chiffres existe-t-il ? ....

b) Combien de n° de téléphone à 10 chiffres commençant par 05 *existe-t-il ?*. ....

c) Combien de n° de téléphone à 10 chiffres ne comptant que des chiffres pairs existe-t-il ? ....

2. On considère une urne contenant n *boules numérotées de* 1 *à* n*. On tire successivement* p *boules* <u>*en remettant à chaque fois*</u> *la boule tirée dans l'urne. On note* $(x_1, ..., x_p)$ *la* p*-liste des résultats obtenus. Combien il y a-t-il de* p*-listes possibles ?*

- *Nombre de choix pour la* 1*ère boule :* ......
- *Nombre de choix pour la* 2*-ième boule :* ......
- *... etc*
- *Nombre de choix pour la* p*-ième boule :* ......

Au final, on a $\underbrace{\ldots\ldots \times \ldots\ldots \times \ldots \times \ldots..}_{\ldots\ldots.\ fois} = \ldots\ldots$ *choix possibles.*

3.2 Arrangements sans répétition

Proposition 24 *Soient* $n, k \in \mathbb{N}^*$*,* E *et* F *deux ensembles finis avec* $Card(E) = k$ *et* $Card(F) = n$*. Notons* $\mathscr{I}(E, F) = \{f \in \mathscr{F}(E, F) : f \text{ injective}\}$ *l'ensemble des injections de* E *dans* F*. Alors*

$$Card\big(\mathscr{I}(E,F)\big) = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-(k-1)) = \prod_{i=1}^{k}(n-(i-1)).$$

Remarque 25 *En utilisant la notation factorielle, on a aussi* $n\times(n-1)\times\ldots\times(n-(k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
$\dfrac{n!}{(n-k)!}$ *est appelé* <u>*le nombre d'arrangements sans répétition*</u> *de* k *éléments parmi* n*. Il s'agit du nombre de façons de choisir* k *élément parmi* n*, sans répétition et en tenant compte de l'ordre.*

Preuve. ....

....

....

....

....

....

....

.... ∎

Exemple 26 *On considère une urne contenant* n *boules numérotées de* 1 *à* n*. On tire successivement* p *boules* ($p \leqslant n$) <u>*sans remettre*</u> *la boule tirée dans l'urne. On note* $(x_1,\ldots,x_p)$ *la* p*-liste des résultats obtenus. Combien il y a-t-il de* p*-listes possibles ?*

- *Nombre de choix pour la* 1*ère boule :* ....
- *Nombre de choix pour la* 2*-ième boule :* ....
- *... etc*
- *Nombre de choix pour la* p*-ième boule :* ....

Au final, on a ....

3.3 Permutations

Proposition 27 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$*,* E *et* F *deux ensembles finis avec* $Card(E) = Card(F) = n$*. Notons* $\mathscr{B}(E,F) = \{f \in \mathscr{F}(E,F) : f \text{ bijective}\}$ *l'ensemble des bijections de* E *dans* F*. Alors*

$$Card\big(\mathscr{B}(E,F)\big) = n!.$$

Preuve. Puisque $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$, d'après la Proposition 15 on sait alors que les injections sont des bijections. Il suffit d'appliquer la Proposition 24 avec $n = p$ car

$$\mathscr{B}(E,F) = \mathscr{I}(E,F) \Rightarrow \text{Card}\big(\mathscr{B}(E,F)\big) = \text{Card}\big(\mathscr{I}(E,F)\big) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

∎

Définition 28 *Une* <u>*permutation d'un ensemble fini*</u> A *est une bijection de* A *dans* A*.*

Remarque 29 *Une permutation d'un ensemble est une manière d'ordonner, d'arranger les éléments de cet ensemble.*

Proposition 30 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et A un ensemble fini avec Card$(A) = n$. Le nombre de façons d'ordonner les n éléments de A est $n!$.*

Remarque 31 *$n!$ est appelé le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments.*

Exemple 32 *Soit $A = \{a, b, c\}$ un ensemble à 3 éléments. Ordonner les éléments de A signifie les ranger sous forme de liste. Il a ici $3! = 6$ façons de les ordonner :*

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b) \text{ et } (c, b, a).$$

Preuve. Commençons par un raisonnement grossier : on cherche à ordonner les n éléments de A. Il faut commencer par choisir le premier élément. N'importe quel élément fait l'affaire, il y a n choix possibles. Une fois le premier élément choisi, il faut passer au second, il reste alors $n-1$ candidats, donc $n-1$ possibilités. Ainsi de suite, on a $n-2$ possibilités pour le troisième, $n-3$ pour le quatrième et ce jusqu'au dernier élément qui lui sera le seul élément restant. Cela fait donc $n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$ façons de faire. Procédons à présent à un raisonnement rigoureux par récurrence sur la propriété suivante définie pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(P_n) \ : \ \text{Card}(A) = n \Rightarrow \text{il existe } n! \text{ façons d'ordonner les éléments de } A.$$

Initialisation : ....

....

....

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons P_n vraie et montrons que P_{n+1} l'est aussi. On se donne un ensemble A avec Card$(A) = n + 1$. ....

....

....

....

....

....

.... ∎

Exemples 33 *1. On considère n boules numérotées de 1 à n. De combien de façons peut-on ordonner ces boules ?*

- *Nombre de choix pour la 1ère boule : n.*
- *Nombre de choix pour la 2-ième boule : $n-1$.*
- *....*
- *Nombre de choix pour la n-ième boule : 1.*

Au final, on a $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1 = n!$ façons possibles d'ordonner ces boules.

2. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot PROBA ? L'anagramme d'un mot est un nouveau mot que l'on crée à partir des mêmes lettres. ....

....

3. Combien existe-t-il d'anagrammes du mot SMS ? Il y a 3 *lettres mais* 2 *sont identiques. Pour comprendre, numérotons* S_1 *et* S_2 *ces deux lettres S. En faisant une permutation de ces* 3 *lettres on crée* $3! = 6$ *anagrammes :* ....

En retournant à la lettre S*, on voit que chaque anagramme est compté deux fois, il faut donc diviser le résultat final par* $2 = 2!$ *qui correspond au nombre de permutations de* 2 *éléments. Finalement, il y a* 3 *anagrammes du mot SMS qui sont : SMS, MSS et SSM. La proposition suivante généralise cet exemple :*

Proposition 34 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *objets parmi lesquels* $n_1, n_2, ..., n_k$ *sont indistinguables. Le nombre de permutations différentes de ces* n *objets est* $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_k!}$.
Notons que l'on a $0 \leqslant n_1 + n_2 + ... + n_k \leqslant n$.

Preuve. Admise. ■

Exemple 35 *Combien d'anagrammes peut-on faire avec le mot KAYAK ?* ....

....

3.4 Combinaisons sans répétition

Définitions 36 *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

- *On appelle* <u>*combinaison de* k *éléments*</u> ....

  ....

  ....

- *On appelle* <u>*coefficient binomial de* k *parmi* n</u> ....

  ....

  ....

Remarque 37 *Autrement dit,* $\binom{n}{k}$ *est le nombre de parties à* k *éléments incluses dans une partie à* n *éléments donnée.* $\binom{n}{k}$ *est aussi appelé* <u>*nombre de combinaisons sans répétition*</u> *de* k *éléments parmi* n*. Contrairement aux arrangements, l'ordre n'est pas important pour les combinaisons. Il s'agit en fait du nombre de façons de choisir* k *élément parmi* n*, sans répétition et sans tenir compte de l'ordre des éléments.*

Exemples 38 *1. Soit $E = \{1,2,3,4\}$ un ensemble à 4 éléments. Combien de parties à 2 éléments possède E ? Les parties de E à 2 éléments sont :*...

....

2. L'ensemble vide ....

3. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire <u>simultanément</u> p boules de l'urne ($p \leqslant n$) que l'on met dans un sac. On note $\{x_1, ..., x_p\}$ le sac obtenu. Combien il y a-t-il de sacs possibles ? ....

....

....

Proposition 39 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,1,...,n\}$. Alors*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Preuve. Si n est nul ou si k est nul, le résultat est trivial. Supposons $n, k \neq 0$. On veut choisir une partie à k éléments dans un ensemble à n éléments. Il y a n choix possibles pour choisir le premier élément, puis $n-1$ pour le second, $n-2$ pour le 3ème et ainsi de suite jusqu'au k-ième élément pour lequel il reste $n-(k-1) = n-k+1$ possibilités. Cela fait un total de $n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1)$ façons de choisir k éléments dans un certain ordre. On remarque que nous aurions pu choisir ces k éléments dans un ordre différent. Dans notre calcul, chaque partie à k éléments a été comptée plusieurs fois. Comme chaque partie à k éléments peut être ordonnée de $k!$ façons différentes d'après la Proposition 30. Chacune de ces parties a donc été comptée $k!$ fois. Pour obtenir le nombre exact de parties à k éléments, nous divisons notre résultat par le nombre de permutations possibles $k!$. En utilisant de plus l'égalité

$$n! = \underbrace{1 \times 2 \times ... \times (n-k)}_{=(n-k)!} \times (n-k+1) \times ... \times (n-1) \times n = (n-k)! \times n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1),$$

on obtient bien

$$\binom{n}{k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

■

Proposition 40 *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,1,...,n\}$. Alors $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.*

Remarque 41 *Ce résultat signifie que choisir k éléments ou $n-k$ éléments parmi n revient au même. En effet, choisir un ensemble ou choisir son complémentaire, c'est la même chose.*

Preuve. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, ..., n\}$.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

■

3.5 Combinaisons avec répétition

Définition 42 *Soient $n, k \in \mathbb{N}$ et E un ensemble à n éléments.* . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Exemples 43 *1.* . . . .

. . . .

2. On souhaite ranger 3 pantalons identiques dans 2 tiroirs. À chaque pantalon, on va associer un tiroir parmi 2, il s'agit d'une combinaison avec répétition de 3 éléments parmi 2. Listons les dispositions possibles en notant $\bullet$ l'emplacement de chaque pantalon :

Rangements possibles	*Tiroir 1*	*Tiroir 2*
n°1		
n°2		
n°3		
n°4		

ce qui fait un total de 4 rangements différents. Comment dénombrer cela dans un cas général ?

Regardons le problème d'une autre façon : nous avons 3 pantalons $\bullet\bullet\bullet$ que nous devons ranger dans deux tiroirs, c'est à dire nous devons faire deux paquets (l'un pouvant être vide) à partir de ces trois pantalons, par exemple le rangement n°2 donne :

$$\bullet\bullet \mid \bullet$$

où le symbole $\mid$ représente la cloison du tiroir. On se retrouve avec 4 symboles : $\bullet$, $\bullet$, $\bullet$ et $\mid$. Parmi ces symboles on doit en choisir un pour déterminer la position de la cloison. . . . .

. . . .

. . . .

3. On souhaite maintenant ranger 3 pantalons dans 3 tiroirs. Listons les dispositions possibles :

Rangements possibles	*Tiroir 1*	*Tiroir 2*	*Tiroir 3*
n°1			
n°2			
n°3			
n°4			
n°5			
n°6			
n°7			
n°8			
n°9			
n°10			

ce qui fait un total de 10 *rangements différents. Reprenons le raisonnement précédent :* 3 *pantalons et 3 tiroirs, cela fait* 3 *pantalons et* 2 *cloisons à disposer. Par exemple le rangement n°2 s'écrit :*

....

On a un total de 5 *symboles parmi lesquels on doit en choisir* 2 *pour la place des cloisons. Il s'agit d'une combinaison sans répétition de* 2 *éléments parmi* 5*, il y a donc* $\binom{5}{2} = 10$ *rangements possibles.*

On admettra le résultat suivant qui dénombre les combinaisons avec répétitions de k éléments parmi n :

Proposition 44 *Le nombre de combinaisons avec répétition de* k *éléments parmi* n *est*

$$\Gamma_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Remarque 45 *Le coefficient* Γ_n^k *est appelé nombre de combinaisons avec répétition de* k *éléments parmi* n*. Il s'agit en fait du nombre de façons de choisir* k *élément parmi* n*, avec répétition et sans tenir compte de l'ordre des éléments. On a toujours*

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n+k-1-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{\big(n+k-1-(n-1)\big)!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Exemple 46 *On considère une urne qui contient une boule rouge R, une boule verte V et une boule bleu B. On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne. On répète quatre fois l'opération. L'ensemble des résultats obtenus est formé de sacs de quatre boules, l'ordre n'a pas d'importance. Par exemple, un résultat possible est* $[R, B, B, V]$*. Quel est le nombre de résultats possibles ?* ....

....

....

....

Remarque 47 *Notons que l'on peut toujours se ramener au problème de rangement dans des tiroirs :* ....

....

....

....

....

....

3.6 Triangle de Pascal et binôme de Newton

Proposition 48 *(Formule du triangle de Pascal) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. Alors*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Preuve. On veut dénombrer les façons de choisir k éléments parmi $n+1$. On considère A un ensemble à $n+1$ éléments et $a \in A$. On remarque qu'il y a deux types de parties à k éléments : celles qui contiennent a et celles qui ne contiennent pas a.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

.... ∎

Remarque 49 ***Le triangle de Pascal :***
Il s'agit du tableau des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$. Pour l'obtenir, on place des 1 sur la première colonne et la diagonale puis on utilise la formule du triangle de Pascal pour remplir chaque ligne.

	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1		1			
3	1			1		
4	1				1	
5	1					1

Proposition 50 *(Formule du binôme de Newton) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} x y^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{n} x^n.$$

Remarque 51 *Les coefficients binomiaux qui interviennent dans cette formule sont tous les coefficients de la ligne n du triangle de Pascal.*

Preuve. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y) \times (x+y) \times \ldots \times (x+y)}_{n \text{ fois}}. \qquad (\star)$$

Lorsque l'on développe cette expression, on n'obtient que des termes de la forme $x^a y^b$ avec $a, b \in \mathbb{N}$. Chacun de ces termes est obtenu en choisissant x ou y dans chacun des n facteurs $(x+y)$. On en déduit que a et b sont dans $\{0, \ldots, n\}$ et vérifient $a+b=n$. Une fois que le développement du produit $(\star)$ est terminé, il reste à regrouper les termes $x^a y^b$ identiques. Prenons par exemple le cas où $a=k$ et donc $b=n-k$ et comptons le nombre de termes $x^k y^{n-k}$ du développement $(\star)$. Pour obtenir ce terme, il a fallu choisir x dans k facteurs $(x+y)$ et choisir y dans les $n-k$ autres. On sait qu'il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir k facteurs parmi n. Il y a donc au final exactement $\binom{n}{k}$ termes du type $x^k y^{n-k}$. Il n'y a en effet pas besoin de compter les façons de choisir les y, puisque une fois que les x sont choisis dans le développement, les y le sont aussi. Au final on obtient bien la formule du binôme en sommant de k variant de 0 à n. ∎

Définition 52 *Soit E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E l'ensemble constitué de toutes les parties de E. On note $\mathcal{P}(E) = \{A \text{ un ensemble tel que } A \subset E\}$.*

Exemple 53 *Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Alors $\mathcal{P}(E) =$*...

On voit que quel que soit l'ensemble E, $\mathcal{P}(E)$ contient toujours au moins deux éléments : $\varnothing$ et E.

Proposition 54 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n. Alors Card$(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.*

Preuve. Voir TD. ∎

L1 MCPI	2019-2020

Analyse et Probabilités

PLANCHE 4

Introduction à l'analyse combinatoire

Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que que la somme des n premiers entiers impairs est égale à n^2. <u>En déduire</u> que la somme des n premiers entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2. Soient E, F deux ensembles finis tels que $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$ et $f : E \to F$ une application. On considère les assertions suivantes :

(i) f est injective.

(ii) f est surjective.

(iii) f est bijective.

Montrer que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (i)$.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, x_1 ..., x_n \in [0, 1]$. En utilisant le Lemme des tiroirs, montrer qu'il existe $x_i, x_j \in \{x_0, x_1 ..., x_n\}$ tels que $|x_i - x_j| \leqslant \frac{1}{n}$.

Exercice 4. Soient A un ensemble fini et $B \subset A$ un sous-ensemble de A. Montrer que si $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(A)$. Alors $A = B$.

Exercice 5. Soient A et B deux ensembles finis. Montrer que

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(B).$$

Exercice 6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E, F deux ensembles finis avec $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) = n$.
Notons $\mathscr{B}(E, F) = \{f \in \mathscr{F}(E, F) : f \text{ bijective}\}$ l'ensemble des bijections de E dans E. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que

$$\mathrm{Card}\big(\mathscr{B}(E, F)\big) = n!.$$

Exercice 7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, ..., n\}$. Montrer que

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini de cardinal n. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que E possède 2^n sous-ensembles.

Exercice 9. Soient A et B deux ensemble finis. On note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Déterminer $\mathrm{Card}(A \Delta B)$.

Exercice 10. Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments et $A \subset E$ un ensemble à $p \in \mathbb{N}$ éléments, $p \leqslant n$. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un unique élément de A?

Exercice 11. On considère les mains de 5 cartes que l'on obtient en tirant successivement et sans remise 5 cartes d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien il y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien il y a-t-il de mains contenant exactement un as ?
3. Combien il y a-t-il de mains contenant au moins un valet ?
4. Combien il y a-t-il de mains contenant à la fois au moins un roi et au moins une dame ?

Exercice 12. (Formule de Vandermonde) Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$ avec $c \leqslant a + b$. On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires numérotées respectivement $B_1, ..B_a$ et $N_1, ...N_b$. On extrait au hasard et simultanément c boules de cette urne et on regarde le nombre de boules de chaque couleur obtenues.

1. Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
2. Soit $k \in \mathbb{N}, k \leqslant a$. Quel est le nombre de tirages possibles contenant k boules blanches ?
3. En déduire la formule de Vandermonde dans le cas où $c \leqslant a$ et $c \leqslant b$
$$\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}.$$
4. La formule reste-elle vraie si on suppose seulement $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $c \leqslant a + b$?

Exercice 13. On considère un sac de 26 pièces distinctes sur lesquelles sont inscrites les 26 lettres de l'alphabet. On pioche une pièce et note le résultat obtenu, on replace la pièce dans le sac puis on recommence deux fois l'opération. Au final, on obtient un mot de 3 lettres.

1. Combien de mots possibles peut-on former ?
2. Parmi ces mots, combien il y en a-t-il :
   (a) ayant des lettres distinctes ?
   (b) ne comportant que des voyelles ?
   (c) comportant une unique voyelle ?
   (d) comportant au moins une voyelle ?
   (e) étant des palindromes ? *Un palindrome est un mot qui peut se lire indifféremment de droite à gauche ou de gauche à droite comme « kayak » par exemple.*
3. On suppose à présent que deux personnes écrivent chacune un mot de 3 lettres en utilisant la même méthode avec remise que précédemment. On note E l'ensemble des écritures possibles, E_1 l'ensemble des écritures telles que les deux personnes ont composé le même mot et E_2 l'ensemble des écritures qui ne comportent que des voyelles. Déterminer les cardinaux des ensembles suivants : $E,\ E_1,\ E_2,\ E_1 \cup E_2,\ \overline{E}_1 \cup E_2$ et $\overline{E}_1 \cup \overline{E_2}$.

Exercice 14. Un collectionneur de timbres possède 6 timbres français et 8 timbres étrangers. Tous ces timbres sont supposés différents les uns des autres. Ce collectionneur veut remplir une pochette de 4 timbres.

1. Combien il y a-t-il de façons de faire ?
2. Il veut que sa pochette contienne 2 timbres français exactement. Combien il y a-t-il de possibilités ?
3. Il veut que sa pochette contienne au moins 3 timbres français. Combien il y a-t-il de possibilités ?

Exercice 15. On joue au poker avec un jeu de 32 cartes : 4 couleurs et 8 hauteurs et chaque joueur reçoit 5 cartes tirées simultanément du jeu.

1. Combien de mains possibles un joueur peut-il recevoir ?
2. Parmi ces mains, combien comportent exactement :
   (a) un unique as ?
   (b) au moins un as ?
   (c) une quinte flush ? (5 cartes de la même couleur dont les hauteurs se suivent par exemple $9, 10$, valet, dame, roi de trèfle).
   (d) une quinte ? (c'est à dire 5 cartes dont les hauteurs se suivent).
   (e) Exactement 3 reines et 2 valets ?
   (f) un full ? (c'est à dire 3 cartes d'une même hauteur et 2 cartes d'une autre hauteur, par exemple 3 valets et 2 rois ?

Exercice 16. Un joueur tire successivement 12 cartes sans remise d'un jeu de 52 cartes et les pose, face visible, sur une table.

1. Combien de réalisations peut-il observer ?
2. Parmi ces réalisations, combien il y en a-t-il qui comportent exactement :
   (a) 3 piques, 2 coeurs, 4 trèfles, 3 carreaux ?
   (b) Les 4 as ?
   (c) Les 4 as consécutivement ?

Exercice 17. Disposant de roses, de tulipes et de marguerites et souhaitant faire un bouquet de 9 fleurs, combien de compositions différentes peut-on élaborer ?

Exercice 18.

1. Combien il y a-t-il de couples $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n + m = 3$?
2. Combien il y-a-t-il de triplets $(n, p, m) \in \mathbb{N}^3$ tels que $n + p + m = 9$?

♣ **Exercice 19.** Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et A, A', B, B' des ensembles finis tels que

$$\text{Card}(A) = \text{Card}(A') = a \text{ et } \text{Card}(B) = \text{Card}(B') = b.$$

1. Déterminer le nombre de bijections de $A \times B$ sur $A' \times B'$.
2. Supposons maintenant que $\{A, B\}$ et $\{A', B'\}$ forment deux partitions d'un ensemble E, c'est à dire
   $$A \cup B = E, A \cap B = \varnothing \text{ et } A' \cup B' = E, A' \cap B' = \varnothing.$$
   (a) Déterminer le nombre de bijections $f : E \to E$.
   (b) Déterminer le nombre de bijections $f : E \to E$ telles que $f(A) = A'$ et $f(B) = B'$.

♣ **Exercice 20.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On doit placer autour d'une table ronde $2n$ personnes : n hommes et n femmes qui constituent n couples.

1. Combien existe-t-il de dispositions ?
2. Combien existe-t-il de dispositions respectant l'alternance des sexes ?
3. Combien existe-t-il de dispositions qui ne séparent pas les couples ?
4. Combien existe-t-il de dispositions respectant l'alternance des sexes et qui ne séparent pas les couples ?