Chapitre 4 : Dérivées, intégrales et primitives

1 Dérivation d'une fonction

1.1 Définitions et règles de dérivation

On note dans la suite I et J des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$.

Définitions. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.*
*. On dit que f est **dérivable en** a si l'application*

$$\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \underline{\hspace{3cm}} \end{array}$$

. . . .

. . . .

. On dit que f est dérivable sur un intervalle ouvert $J \subset I$ si . . . .

. . . .

*. On appelle **domaine de dérivabilité** de f l'ensemble $\tilde{I} =$* . . . .

On note la fonction dérivée de f par $f' : \begin{array}{ccc} \tilde{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$.

Remarque *Le domaine de dérivabilité d'une fonction est toujours inclus dans son domaine de définition et se détermine toujours avant de calculer la dérivée de la fonction.*

Exemples *Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des applications suivantes :*

$$f : x \mapsto \ln(1 - x^2),\ \ g : x \mapsto \sqrt{2x+1} \text{ et } h : x \mapsto \exp(\sin(x^2)).$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Proposition *Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

— *Si f est dérivable en x_0 alors* ....

— *Si f est dérivable sur I alors* ....

Propriétés *(Règles de dérivation)*
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$

. $(f+g)'(x) =$ ....

. $(\lambda f)'(x) =$ ....

. $(f \times g)'(x) =$ ....

. $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \underline{\qquad\qquad}$, *si* $f(x)$..........

. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$, *si* $g(x)$..........

Proposition *(Dérivation de composée de fonctions)*
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur des intervalles ouverts I et J et telles que $\mathscr{I}(f) = f(I) \subset J$. Alors pour tout $x \in I$, g est dérivable en $f(x)$ et $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et on a pour tout $x \in I$

$$(g \circ f)'(x) = \text{..}$$

Exemples *Si* $g_1(x) = e^{x^2+3x+1} = e^{f_1(x)}$ *alors* $g_1'(x) =$. . . . .

Si $g_2(x) = \sin(2x+1) = \sin(f_2(x))$ *alors* $g_2'(x) =$. . . . .

Si $g_3(x) = \left(x^3 + 2\ln(x)\right)^2 = (f_3(x))^2$ *alors* $g_3'(x) =$. . . . .

Si $g_4(x) = \ln(1+\cos(x)) = \ln(f_4(x))$ *alors* $g_4'(x) =$. . . . .

Corollaire *(Dérivation de l'application réciproque)*
Soient $f : I \to J$ une fonction dérivable et bijective et $f^{-1} : J \to I$ sa bijection réciproque. . . . .

. . . .

. . . .

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \text{..}$$

Exemples $f(x) = x^2,\ f'(x) = \ldots\ldots,\ f^{-1}(y) = \ldots\ldots.$ *donc* $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\qquad\qquad} = \dfrac{1}{\qquad\qquad}.$

$g(x) = \ln(x),\ g'(x) = \ldots\ldots,\ g^{-1}(y) = \ldots\ldots.$ *donc* $(g^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\qquad\qquad} = \dfrac{1}{\qquad\qquad} = \ldots\ldots\ldots$

$h(x) = \tan(x),\ h'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ h^{-1}(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *donc* $(h^{-1})'(y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

....

Définition *(Tangente en un point)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en un point $a \in I$. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $(a, f(a))$ est donnée par

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

1.2 Étude des variations d'une fonction

Proposition *(Sens de variation d'une fonction)*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow$..
2. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow$..
3. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow$..
4. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) > 0 \Rightarrow$..
5. $\forall x \in]a, b[\ f'(x) < 0 \Rightarrow$..

Remarque ....

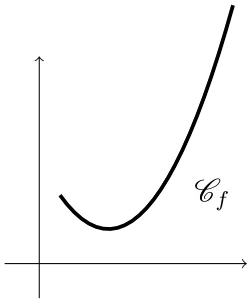
....

....

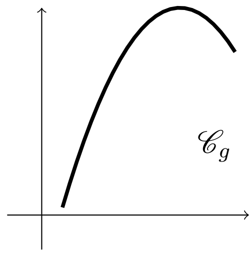
....

1.3 Convexité et concavité

Graphiquement, une fonction f définie sur un intervalle est convexe si et seulement si, pour tous points A et B appartenant au graphe de f, le graphe de f entre A et B est en dessous du segment $[A, B]$. Pour une fonction concave, c'est le contraire : le graphe est au dessus du segment $[A, B]$.



f est ....



g est ....

Définitions. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

. *f est **convexe** sur I si elle vérifie*

. . . .

. *f est **concave** sur I si* . . . .

Proposition *(Critère de convexité)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' est dérivable sur un l'intervalle ouvert I, on note f'' sa dérivée.
. *Si $f'' \geqslant 0$ sur I alors* ....

. *Si $f'' \leqslant 0$ sur I alors* ....

Proposition *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.*

. *Si f est convexe sur I alors* ....

. *Si f est concave sur I alors* ....

Remarque *Cette proposition nous dit que si f est dérivable et convexe, le graphe de f est au dessus de chacune de ses tangentes alors que si elle est concave, le graphe est au dessous de chacune de ses tangentes.*

Exemples *Montrer que les fonctions exponentielle et le logartihme vérifient les propriétés suivantes :*
$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x - 1$. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

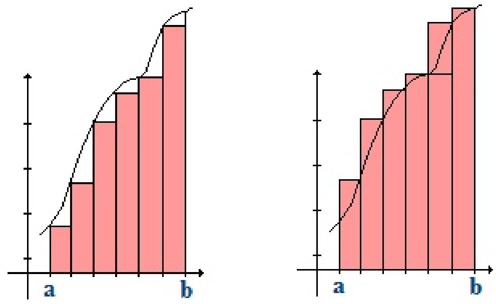
. . . .

. . . .

2 Intégrales et primitives

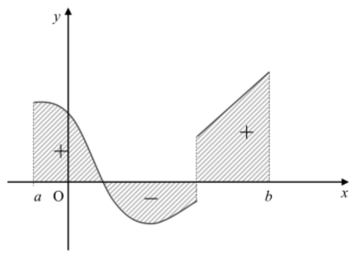
2.1 Quelques mots sur l'intégrale

On considère une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$. On cherche à calculer l'aire $\mathscr{A}$ située en dessous du graphe de f noté $\mathscr{C}_f$ et entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et l'axe des abscisses $\mathscr{O}_x$. Pour ce faire, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessous de la courbe en découpant l'intervalle $[a,b]$ en sous intervalles $[a_n, b_n]$ et on note $\mathscr{A}_n^-$ l'aire obtenue. De la même façon, on peut approcher cette aire par des sommes d'aires de rectangles situés au dessus de la courbe et on note $\mathscr{A}_n^+$ l'aire obtenue.



Si la limite des aires en dessous est égale à la limite des aires au dessus lorsque le pas de subdivision de l'intervalle tend vers 0 (càd $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^- = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_n^+$), on appelle cette limite commune l'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ et on la note $\mathscr{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. On dit alors que f est intégrable sur $[a,b]$.

Remarques
a) Si f prend des valeurs positives et négatives, son intégrale sur $[a,b]$ est égale à la somme des aires que forme son graphe avec l'axe des abscisses $\mathscr{O}_x$ selon la règle suivante : si la forme géométrique est située au dessus de l'axe des abscisses, son aire est comptée positivement alors que si elle est au dessous, l'aire est comptée négativement.
b) Si f est une fonction constante égale à $m \in \mathbb{R}$ sur $[a,b]$, alors



$$\int_a^b f(t)dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriétés *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$.*

1. *La fonction $f + g$ est intégrable et on a*

   . . . .

2. *Pour tout nombre réel λ, la fonction λf est intégrable et on a*

   . . . .

3. *Si $f \geqslant g$ alors*

   . . . .

4. *Pour tout $c \in]a,b[$, f est intégrable sur $[a,c]$ et $[c,b]$ et on a*

   . . . .

Remarques

— *Deux fonctions qui diffèrent en un nombre fini de points ont la même intégrale.*

— ***Attention :*** $\int_a^b f(t) \times g(t)dt \neq$. . . . .

— *Pour toute fonction f et tout réel a on pose par convention* $\int_a^a f(t)dt =$ ....

— *Si f est intégrable sur $[a,b]$, on pose* $\int_b^a f(t)dt =$ ....

— *Grâce à ces deux conventions, on obtient la formule d'addition, dite relation de Chasles :*

$\forall x, y, z \in [a,b],\ \int_x^z f(t)dt =$ ....

Nous utiliserons dans la suite le critère d'intégrabilité suivant :

Théorème *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* . . . .

. . . .

Remarque *(Autre critère) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* . . . .

. . . .

2.2 Primitives : définitions et notations

Définition *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.*

. Si I est un intervalle ouvert, une primitive de f est . . . .

. . . .

. Si $I = [a,b[,]a,b]$ ou $[a,b]$, une primitive de f est . . . .

. . . .

Remarque *Si F est une primitive de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, toute primitive G de f sur I est de la forme :*

$$\begin{array}{rcl} G : I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) + c, \end{array}$$

où c est un réel quelconque. Autrement dit, deux primitives d'une même fonction sont égales à une constante près.

Théorème *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.* . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Remarque *Ce théorème nous dit que toute fonction continue sur I possède des primitives. De plus, pour tout $a \in I$, la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

2.3 Outils et techniques de calcul

2.3.1 Primitives évidentes

Lorsque l'on cherche la primitive d'une fonction, on commence par regarder si celle-ci ne s'écrit pas sous la forme $u'(x) \times f(u(x))$, avec $f(u(x))$ égale à l'une des expressions suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$u^\alpha(x),\ \frac{1}{\sqrt{u(x)}},\ \frac{1}{u(x)},\ e^{u(x)},\ \cos(u(x)),\ \sin(u(x)),\ 1+\tan^2(u(x)),\ \frac{1}{\cos^2(u(x))},\ \frac{1}{1+u^2(x)},\ \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}},$$

puis on se réfère au tableau des primitives usuelles.

Exemples *Donner une primitive des fonctions suivantes :*

1. $f_1(x) = (x+1)^4 = u'(x) \times (u(x))^4$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

   $F_1(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. $f_2(x) = (4x+1)^2 = \ldots\ldots \times 4(4x+1)^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

   $F_2(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. $f_3(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+3}} = \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

   $F_3(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. $f_4(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x^2+3}} = \ldots\ldots \times \dfrac{4x}{\sqrt{2x^2+3}} = \ldots\ldots \times \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

   $F_4(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. $f_5(x) = (6x+1)e^{3x^2+x} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

   $F_5(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. $f_6(x) = 3xe^{5x^2} = \ldots\ldots\ldots \times 10xe^{5x^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

   $F_6(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7. $f_7(x) = 4x\cos(x^2+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\cos(x^2+3) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

   $F_7(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

8. $f_8(x) = (2x-3)\sin(x^2-3x+1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

   $F_8(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

9. $f_9(x) = \dfrac{12x+2}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \ldots.\times\dfrac{}{\cos^2(3x^2+x+\frac{1}{12})} = \ldots.\times\dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$ *a pour primitive*

$$F_9(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

10. $f_{10}(x) = \dfrac{3}{1+4x^2} = \ldots.\times\dfrac{1}{1+(\ldots..)^2} = \ldots.\times\dfrac{2}{1+(\ldots..)^2} = \ldots.\times\dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots,$ *a pour primitive*

$$F_{10}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

11. $f_{11}(x) = \dfrac{6x^2+8x+9}{2x^3+4x^2+9x-3} = \dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$ *a pour primitive*

$$F_{11}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

12. $f_{12}(x) = \dfrac{3x+6}{x^2+4x} = \ldots.\times\dfrac{x+2}{x^2+4x} = \ldots.\times\dfrac{2x+4}{x^2+4x} = \ldots.\times\dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots.,$ *a pour primitive*

$$F_{12}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

13. $f_{13}(x) = \dfrac{5}{\sqrt{1-9x^2}} = \dfrac{5}{\sqrt{1-(\ldots..)^2}} = \ldots..\times\dfrac{}{\sqrt{1-(\ldots..)^2}} = \ldots..\times\dfrac{}{\sqrt{\quad}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots.,$ *a pour primitive*

$$F_{13}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

14. $f_{14}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{-x^2+6x-8}} = \dfrac{2}{\sqrt{\quad}} = \dfrac{2}{\sqrt{\quad}} = \dfrac{2}{\sqrt{\quad}}$

$= 2\times\dfrac{}{\sqrt{\quad}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots.,$ *a pour primitive*

$$F_{14}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

15. $f_{15}(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{-4x^4+20x^2-24}} = \dfrac{5x}{\sqrt{\quad}} = \dfrac{5x}{\sqrt{\quad}} = \ldots\ldots.\times\dfrac{\ldots.}{\sqrt{\quad}}$

$= \ldots.\times\dfrac{}{\sqrt{\quad}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots..,$ *a pour primitive*

$$F_{15}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

16. $f_{16}(x) = \dfrac{7}{9x^2+12x+5} = \dfrac{7}{} = \dfrac{7}{} = \ldots..\times\dfrac{\ldots..}{}$

$= \ldots..\times\dfrac{}{}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots..,$ *a pour primitive*

$$F_{16}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

17. $f_{17}(x) = \dfrac{5x}{x^4+6x^2+10} = \dfrac{5x}{\rule{4cm}{0.4pt}} = \dfrac{5x}{\rule{4cm}{0.4pt}} = \ldots\ldots \times \dfrac{\ldots\ldots}{\rule{4cm}{0.4pt}}$

$= \ldots\ldots \times \dfrac{}{\rule{3cm}{0.4pt}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{17}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

18. $f_{18}(x) = \dfrac{x^3+3x}{x^4+6x^2+10} = \ldots\ldots \times \dfrac{4x^3+12x}{x^4+6x^2+10} = \ldots\ldots \times \dfrac{}{\rule{1.5cm}{0.4pt}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$F_{18}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

19. $f_{19}(x) = \dfrac{5x}{9x^4-12x^2+5} = \dfrac{5x}{\rule{5cm}{0.4pt}} = \dfrac{5x}{\rule{4cm}{0.4pt}} = \ldots\ldots \times \dfrac{}{\rule{4cm}{0.4pt}}$

$= \ldots\ldots \times \dfrac{}{\rule{3cm}{0.4pt}}$ *avec* $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, *a pour primitive*

$$F_{19}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2.3.2 Intégration par parties

On considère u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle $[a,b]$ et telles que u' et v' soient continues sur $[a,b]$. On sait que $(uv)' = u'v + uv'$, en intégrant sur $[a,b]$, on obtient

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

On en déduit alors la formule dite « d'intégration par parties » :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou, pour une intégrale indéfinie :

$$\int u(x)v'(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemples

1. *Calculer* $\int_0^1 xe^x dx$. *On pose* $u(x) = x$ *et* $v'(x) = e^x$, *de cette façon,* $u'(x) = \ldots\ldots$ *et* $v(x) = \ldots\ldots$ *Les fonctions u et v ainsi définies sont dérivables sur* $[0,1]$, u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

   $\int_0^1 xe^x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

   $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. *Calculer* $\int_1^e x\ln(x)dx$. *On pose* $u(x) = \ln(x)$ *et* $v'(x) = x$, *alors* $u'(x) = \ldots\ldots$ *et* $v(x) = \ldots\ldots.$ *Les fonctions* u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $[1, e]$, u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\ln(x)dx &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

3. *Calculer* $\int \arcsin(x)dx$. *On pose* $u(x) = \arcsin(x)$ *et* $v'(x) = 1$, *alors* $u'(x) = \frac{}{}$ *et* $v(x) = \ldots.$

   Les fonctions u *et* v *ainsi définies sont dérivables sur* $]-1, 1[$, u' *et* v' *sont continues et la formule d'intégration par parties donne alors*

$$\begin{aligned}
\int \arcsin(x)dx &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

4. *Donner une primitive de* $f : x \mapsto x^2e^x$ *sur* $\mathbb{R}$. *On pose* $u(x) = \ldots.$ *et* $v'(x) = \ldots.$, *de cette façon,* $u'(x) = \ldots.$ *et* $v(x) = \ldots..$ *On a*

$$\int x^2e^x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

   L'astuce pour calculer cette intégrale qui contient une exponentielle consiste à refaire une intégration par parties pour calculer

$$\begin{aligned}
\int xe^x dx &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

   d'où

$$\int x^2e^x dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

   Une primitive de f *sur* $\mathbb{R}$ *est donc* $F : x \mapsto \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2.3.3 Changement de variable

Théorème *Soient f une fonction .... définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une .... telle que φ' soit .... Pour tout $a, b \in I$, on a en posant ....*

....

Autrement dit, si F est une primitive de f, alors ....

Remarque ....

Exemples

1. *Calculer $\int_1^2 \frac{x}{1+x^4} dx$ en posant $t = x^2$. L'application $x \mapsto x^2$ est une bijection continue de .... vers .... et sa dérivée $x \mapsto$ .... est continue sur ...., ce changement de variable est donc admissible. On procède par étapes :*
   - *. Les bornes de l'intégrale : si $x = 1$, alors $t =$ .... et si $x = 2$ alors $t =$ ....*
   - *. La variable d'intégration : comme $t = x^2$, par dérivation, $dt =$ ....*
   - *. L'intégrale :*

   $$\int_1^2 \frac{x}{1+x^4} dx = \ldots\ldots \int_1^2 \frac{2x}{1+\left(\ldots\ldots\right)^2} dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

   ....

2. *Calculer $\int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx$ en posant $t = e^x$. L'application $x \mapsto e^x$ est une bijection continue de .... vers .... et sa dérivée $x \mapsto$ .... est continue sur ...., ce changement de variable est donc admissible.*
   - *. Les bornes de l'intégrale : si $x = 0$, alors $t =$ .... et si $x = 1$ alors $t =$ .....*
   - *. La variable d'intégration : comme $t = e^x$, par dérivation, $dt =$ ....*
   - *. L'intégrale : on a*

   $$\int_0^1 \frac{2}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{2e^x}{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)} dx = 2\int_0^1 \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\left(\ldots\ldots\right)^2 + 1} = 2\int_{\ldots}^{\ldots} \frac{\ldots}{} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

   $=$..

3. *Calculer $\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}} dx$ en posant $t = \sqrt{1+x}$. L'application $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est une bijection continue de .... vers .... et sa dérivée $x \mapsto$ .... est continue sur ...., ce changement de variable est donc admissible.*
   - *. Les bornes de l'intégrale : si $x = 3$, alors $t =$ .... et si $x = 8$ alors $t =$ ....*
   - *. La variable d'intégration : comme $t = \sqrt{1+x}$, par dérivation, $dt =$ ....*
   - *. Comme $t = \sqrt{1+x}$, on a $x =$ ....*

. *L'intégrale : on a*

$$\int_3^8 \frac{1}{x\sqrt{1+x}}dx = \dots\ \int_3^8 \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{1+x}}dx = \dots\ \int_{\dots}^{\dots} \frac{\qquad}{\qquad} = \dots \int_{\dots}^{\dots} \frac{\qquad}{\qquad}.$$

Pour calculer cette intégrale, on va décomposer $\frac{1}{(t-1)(t+1)}$ *en éléments simples : on cherche* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} = \frac{\qquad}{(t-1)(t+1)} = \frac{\qquad}{(t-1)(t+1)},$$

ce qui amène à $\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & \dots \\ a-b & = & \dots \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & \dots \\ b & = & \dots \end{array}\right.$

Finalement

$$\begin{aligned} 2\int_2^3 \frac{1}{(t-1)(t+1)}dt &= 2\int_2^3 \frac{1}{\dots(t-1)}dt - 2\int_2^3 \frac{1}{\dots(t+1)}dt \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

4. *Calculer* $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}dx$ *en posant* $t = \sin(x)$. *L'application* $x \mapsto \sin(x)$ *est une bijection continue de .... vers .... et sa dérivée* $x \mapsto$ *................ est continue sur ....,*

ce changement de variable est donc admissible.

. *Les bornes de l'intégrale : si* $x = -\pi/4$, *alors* $t =$ .... *et si* $x = \pi/4$ *alors* $t =$ ....

. *La variable d'intégration : comme* $t = \sin(x)$, *on a* $dt =$ ....

. *L'intégrale : on a* $f(x) = \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad} = \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad}$,

et donc

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{2-\cos^2(x)}dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{\qquad\qquad}dx = \int \frac{\qquad}{\qquad} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

. . . .

5. *Calculer* $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$ *en posant* $t = 1-x^2$. *L'application* $x \mapsto 1-x^2$ *est une bijection continue de .... vers .... et sa dérivée* $x \mapsto$ *........... est continue sur ...., ce changement de variable est donc admissible.*

. *Les bornes de l'intégrale : si* $x = 0$, *alors* $t =$ .... *et si* $x = 1/2$ *alors* $t =$ ....

. *La variable d'intégration : comme* $t = 1-x^2$, *on a* $dt =$ ....

. *L'intégrale : on a*

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}dx = \dots\dots \int_0^{1/2} \frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}dx = \dots\ \int_{\dots}^{\dots} \frac{\qquad}{\qquad}dt = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

. . . .

2.3.4 Intégration de fonctions trigonométriques

On s'intéresse ici aux intégrales de la forme $\int \sin^p(x)\cos^q(x)dx$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$. On différencie quelques cas selon la parité et le signe de p et q.

a) q impair : On prend pour variable $t =$ .... donc $dt =$ .... et on utilise la formule

$\cos^2(x) =$. . . . .

b) p impair : Même principe qu'en **a)** en posant $t =$ ....

c) $\mathbf{p, q \geqslant 0}$ et pairs : On abaisse le degré en utilisant les formules :

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{ et } \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

puis si nécessaire on recommence avec $\sin^2(2x)$ et $\cos^2(2x)$, ou on change de variables.

d) p et q pairs, l'un au moins étant négatif : On prend pour variable $t =$ ...., cette méthode est aussi applicable lorsque p et q sont impairs.

Exemples *Calculer*

1. $\int \cos(x)\sin^3(x)dx =$. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. $\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx =$. . . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^4(x)}dx = \int \frac{\qquad\qquad}{\sin^4(x)}\text{..............}dx = \int \frac{\qquad\qquad}{\qquad\qquad}dt = -\frac{1}{3\sin^3(x)} + \frac{1}{\sin(x)} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

On a posé $t =$ ....

4. $\int \sin^5(x)\cos^3(x)dx = \frac{\sin^6(x)}{6} - \frac{\sin^8(x)}{8} + C,\ C \in \mathbb{R},$ *en posant* $t = \sin(x)$.

2.3.5 Intégration de fractions rationnelles

Définition *Une fraction rationnelle à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *est une expression de la forme* $\frac{P}{Q}$, *où* P *et* Q *sont des polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *avec* $Q \neq 0$.

Théorème *(Décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{R}$*)*

Soit $\frac{P}{Q}$ *une fraction rationnelle avec pgcd*$(P, Q) = 1$.. . . . .

. . . .

. . . .

Alors $\frac{P}{Q}$ *se décompose de manière unique comme somme*

— . . . .

— ....

— ....

où $A, B, C \in \mathbb{R}$, $i, j \in \mathbb{N}^*$ *avec* $i \leqslant \alpha$ *et* $j \leqslant \beta$.

Remarque ....

....

Proposition *(Décomposition dans le cas où* $deg(P) < deg(Q)$*)*
Soit $\frac{P}{Q}$ *une fraction rationnelle avec pgcd*(P, Q)*=1 et* $\mathbf{deg(P)} < \mathbf{deg(Q)}$. *On suppose qu'il existe* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ *tels que* Q *se factorise de la façon irréductible suivante :*

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha}(x^2+bx+c)^{\beta}, \quad \text{avec } b^2-4c<0.$$

Alors il existe $A_1, ..., A_{\alpha} \in \mathbb{R}$, $B_1, ..., B_{\beta} \in \mathbb{R}$ *et* $C_1, ..., C_{\beta} \in \mathbb{R}$ *tels que* $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemples *Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :*

1. $R_1(x) = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \dfrac{x^3+x^2+x-3}{x^2+x-2}$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. $R_2(x) = \dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \dfrac{x^2+6x+8}{(x^2+x-2)(x^2+2x-3)}$. ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. $R_3(x) = \dfrac{P_3(x)}{Q_3(x)} = \dfrac{x+1}{(x^2-1)(x^2+x+1)^2}$ ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

a) Intégration d'un élément simple de 1ère espèce

Il s'agit de calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent :

. Si $\alpha = 1$: $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

. Si $\alpha \geqslant 2$: $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}} = \int (x-a)^{\cdots\cdots} dx = \frac{(x-a)^{\cdots\cdots}}{(\ldots\ldots)} + C = \ldots\ldots \times \frac{1}{\qquad\qquad} + C,\ C \in \mathbb{R}.$

b) Intégration d'un élément simple de 2nde espèce $\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$

Il s'agit de calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}dx$, $B, C, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4c < 0$. Ce calcul peut s'effectuer en trois étapes que l'on va détailler sur l'exemple suivant :

$$\text{Calculer } F(x) = \int \frac{x+4}{x^2+4x+6}dx.$$

Étudions le dénominateur : on a Δ = ...

Étape 1 : On fait apparaître au numérateur $x+4$ la dérivée du polynôme du second degré du dénominateur x^2+4x+6 : on a $(x^2+4x+6)'$ = ... et donc

$x+4$ = ...

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{x^2+4x+6}dx &= \ldots\ldots \int \frac{}{x^2+4x+6}dx + \ldots\ldots \int \frac{1}{x^2+4x+6}dx \\ &= H(x) + G(x). \end{aligned}$$

On a $H(x) = \ldots\ldots \displaystyle\int \frac{}{} dx$ = ...

donc $H(x)$ = ...

Il reste alors à calculer $G(x)$.

Étape 2 : On écrit le polynôme au dénominateur x^2+4x+6 sous la forme « $c(t^2+1)$ » avec $c \in \mathbb{R}$ une constante pour faire apparaitre la dérivée de la fonction arctangente :

x^2+4x+6 = ...

= ....

= ....

Ainsi

$G(x) = \ldots\ldots \displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+6}dx$ = ...

= ....

= ....

Étape 3 : On conclut

$F(x) = H(x) + G(x)$ = ...

En résumé : intégration d'un élément simple de 2nde espèce

On considère P un polynôme de degré 2 dont le discriminant $\Delta < 0$ (donc pas de racine réelles).

- Un terme du type $\dfrac{Ax+B}{P(x)}$ avec $A \neq 0$ et $B \in \mathbb{R}$ aura pour primitive $C \times \ln(P(x))$ avec $C \in \mathbb{R}$ une constante ou bien $C \times \ln(P(x))$+une arctangente, avec $C \in \mathbb{R}$ une constante.
- Un terme du type $\dfrac{B}{P(x)}$ avec $B \in \mathbb{R}$ aura pour primitive une arctangente.

c) Plan d'étude d'une fraction rationnelle

On s'intéresse à des fonctions qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{P}{Q}$ avec P et Q deux polynômes. Voici les étapes à suivre pour déterminer une primitive de $\dfrac{P}{Q}$:

1. On détermine le domaine de définition de $\frac{P}{Q}$ en cherchant les racines du polynôme Q.
2. On regarde s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(x)$ s'écrive sous la forme $\lambda \times Q'(x)$, auquel cas
$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{\lambda \times Q'(x)}{Q(x)}dx = \lambda \ln(|Q(x)|) + C, C \in \mathbb{R}.$$
3. S'il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = \lambda \times Q'(x)$ on examine les degrés de P et Q :
   (a) Si deg(P)≥deg(Q), on effectue la division de $P(x)$ par $Q(x)$. En notant $Q_1(x)$ le quotient obtenu et $R_1(x)$ le reste on a
   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)Q_1(x) + R_1(x)}{Q(x)} = Q_1(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)}$$
   avec deg(R_1)<deg(Q) et on passe à l'étape 3.(b) avec R_1 et Q.
   (b) Si deg(P)<deg(Q), on factorise au maximum $P(x)$ et $Q(x)$, et on simplifie éventuellement $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ s'il existe des racines communes.
4. On décompose $\dfrac{P}{Q}$ en éléments simples à partir de sa forme factorisée déterminée à l'étape 3.(b).
   (a) Si on a des éléments simples de 1ère espèce : par exemple $\dfrac{2}{x-1}$ a pour primitive $2\ln(|x-1|)$.
   (b) Si on a des éléments simples de 2nde espèce : par exemple $\dfrac{x}{x^2+x+1}$ avec x^2+x+1 qui ne s'annule jamais ($\Delta < 0$). Dans un premier temps, on fait apparaitre la dérivée de x^2+x+1 au numérateur en écrivant $x = \frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}$. Ainsi,
   $$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2+x+1},$$
   avec $u(x) = x^2+x+1$.
   Dans un second temps, on écrit le second terme $\dfrac{1}{x^2+x+1}$ sous la forme $\alpha \times \dfrac{v'(x)}{1+v^2(x)}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et v un polynôme à déterminer. Pour cela, on écrit x^2+x+1 sous la forme $1+(....)^2$. On a
   $$\begin{aligned} x^2+x+1 &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}\left(1 + \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4}}\right) = \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}}\right)^2\right) = \frac{3}{4}\left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

En posant $v(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ qui a pour dérivée $v'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, on obtient donc

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{\frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{v'(x)}{1+v^2(x)}.$$

Finalement,

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} - \frac{2\sqrt{3}}{2\times 3} \times \frac{v'(x)}{1+v^2(x)}$$

admet pour primitive

$$\frac{1}{2}\ln(|u(x)|) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan(v(x)) = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

d) Intégration d'un élément simple de 2nde espèce $\dfrac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\beta}$, avec $\beta \geqslant 2$

Il s'agit de calculer $F(x) = \displaystyle\int \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)^\beta}dx$, $B, C, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2-4c<0$, $\beta \in \mathbb{N}$ et $\beta \geqslant 2$. Ce calcul peut s'effectuer en quatre étapes que l'on va détailler sur l'exemple suivant :

$$\text{Calculer } F(x) = \int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2}dx.$$

Étape 1 : On fait apparaître au numérateur $x+1$ la dérivée du polynôme du second degré du dénominateur x^2-2x+3 : on a $(x^2-2x+3)' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ et donc

$$x+1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2}dx &= \ldots\int \frac{}{(x^2-2x+3)^2}dx + \ldots\int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}dx \\ &= H(x)+G(x).\end{aligned}$$

$H(x)$ est de la forme $\ldots \displaystyle\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx = \ldots \times -\frac{1}{u(x)}$, avec $u(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $H(x) = -\dfrac{1}{\ldots(x^2-2x+3)}$. Il reste alors à calculer $G(x)$.

Étape 2 : On décompose le polynôme au dénominateur x^2-2x+3 en somme d'un carré et d'un reste :

$x^2-2x+3 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ en posant $t = \ldots\ldots$, on a $x^2-2x+3 = \ldots\ldots\ldots$

$$dt = \ldots\ldots \text{ donc } G(x) = \ldots\int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}dx \text{ devient } \ldots\int \frac{dt}{(\ldots\ldots\ldots\ldots)^2} = \phi(t).$$

Étape 3 : Calcul de $\phi(t)$: l'idée est d'écrire $(t^2+2)^2$ sous la forme « $c^2\left(\frac{t^2}{c}+1\right)^2$, » où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

$$\phi(t) = 2\int \frac{dt}{(t^2+2)^2} = 2\int \frac{dt}{\left(2\left(\frac{t^2}{2}+1\right)\right)^2} = 2\int \frac{dt}{\ldots\left(\ldots\ldots+1\right)^2} = \int \frac{dt}{\ldots\left(\left(\quad\right)^2+1\right)^2}.$$

On pose alors $\tan(\theta) = ...$ donc $t = ...$, $dt = ...$
Il en résulte :

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \int \frac{dt}{\rule{8em}{0.4pt}} \\
&= \int \rule{8em}{0.4pt}\, d\theta \\
&= ......\int \rule{8em}{0.4pt}\, d\theta \\
&= ......\int ....d\theta \\
&= ......\int \rule{8em}{0.4pt}\, d\theta \\
&= ....
\end{aligned}$$

Étape 4 : On retourne à la variable de départ x pour le calcul de $G(x)$ et on regroupe avec la partie de $F(x)$ déjà calculée.
On a posé $t = \sqrt{2}\tan(\theta)$ ce qui donne $\tan(\theta) = \rule{3em}{0.4pt}$ et $\theta = ...$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = \frac{2\sin(\theta)\cos^2(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{2\tan(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} = \rule{6em}{0.4pt} = \rule{6em}{0.4pt} = \rule{6em}{0.4pt}$$

donc

$\phi(t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

On obtient finalement comme on a posé $t = x - 1$

$G(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

et donc $F(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Annexe A - Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Domaine de définition	Image	Fonction dérivée	Domaine de dérivabilité
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt[n]{x},\ n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt[n]{x},\ n = 2k+1, k \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{nx^{1-1/n}}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $\alpha \neq \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arccos(x)$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\mathbb{R}$	$[1,+\infty[$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\mathbb{R}$	$]-1,1[$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$[1,+\infty[$	$[0,+\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1,+\infty[$
$\mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$]-1,1[$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$]-1,1[$

On considère une fonction $u : I \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Fonction	**Domaine de définition**	**Fonction dérivée**	**Domaine de dérivabilité**
u^n, $n \in \mathbb{N}^*$	I	$nu'u^{n-1}$	I
$\frac{1}{u^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\{x \in I : u(x) \neq 0\}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$	$\{x \in I : u(x) \neq 0\}$
$\frac{1}{u}$	$\{x \in I : u(x) \neq 0\}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$\{x \in I : u(x) \neq 0\}$
$\sqrt{u}$	$\{x \in I : u(x) \geqslant 0\}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\{x \in I : u(x) > 0\}$
e^u	I	$u'e^u$	I
$\ln(u)$	$\{x \in I : u(x) > 0\}$	$\frac{u'}{u}$	$\{x \in I : u(x) > 0\}$
$\cos(u)$	I	$-u'\sin(u)$	I
$\sin(u)$	I	$u'\cos(u)$	I
$\tan(u)$	$\left\{x \in I : u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$u'(1 + \tan^2(u)) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$	$\left\{x \in I : u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\arcsin(u)$	$\{x \in I : u(x) \in [-1,1]\}$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\{x \in I : u(x) \in]-1,1[\}$
$\arccos(u)$	$\{x \in I : u(x) \in [-1,1]\}$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\{x \in I : u(x) \in]-1,1[\}$
$\arctan(u)$	I	$\frac{u'}{1+u^2}$	I

Annexe B - Primitives usuelles

Fonction	**Primitive**	**Domaine de validité**
a (réel donné)	ax	$\mathbb{R}$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}},$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\|x\|)$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$]-1,1[$
$a^x, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$

Fonction	**Primitive**
$u'u^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\|u\|)$
$u'e^u$	e^u
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$\frac{u'}{\cos^2(u)} = u'\big(1 + \tan^2(u)\big)$	$\tan(u)$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u)$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u)$