

# Chapitre 5 : Équations différentielles

De nombreux problèmes d'origine physique, économique ou biologique conduisent à chercher une fonction  $y$  dépendant d'une variable  $t$  sachant qu'il existe une relation entre  $y$ ,  $t$  et éventuellement d'autres dérivées successives de  $y$  ( $y''$ , ...). Une telle relation est appelée équation différentielle :

$$\begin{aligned}y^2(t) - (y'(t))^2 &= 1 \\ty(t)y'(t) &= y^2(t) - t^2 \\y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) &= te^{-t} \sin(t).\end{aligned}$$

**Exemple : La cinétique chimique :** Il s'agit de trouver l'évolution dans le temps de concentrations, de quantités de matière (nombres de moles) ou encore de pressions partielles. Les réactions d'ordre 1 mènent par exemple à l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = -ky(t),$$

où  $k$  une constante donnée et  $y$  représente la concentration d'un composé chimique.

L'objectif de ce cours est d'apprendre à résoudre une classe bien précise d'équations différentielles, c'est à dire trouver l'expression de la fonction inconnue  $y$ .

## 1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $a, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues données. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du 1er ordre qui sont des équations de la forme :

$$\dots\dots\dots t \in I, \tag{1}$$

où l'inconnue du problème est une fonction dérivable notée  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  qui dépend de la variable  $t$ .

- . On dit que cette équation est une équation différentielle car elle fait intervenir des dérivées de l'inconnue du problème  $y$ .
- . On dit qu'elle est du **1er ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **première** de l'inconnue du problème  $y$ .
- . On dit qu'elle est linéaire car l'équation homogène associée donnée par

$$\dots\dots\dots t \in I, \tag{2}$$

possède la propriété de linéarité suivante :

**Propriété** Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de (2), alors pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , la fonction combinaison linéaire de  $y_1$  et  $y_2$  donnée par

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

est encore solution de (2). En particulier, la fonction identiquement nulle  $y \equiv 0$  est toujours solution de (2).



**Exemple** Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) - 3y(t) = 0.$$

La fonction  $a : t \mapsto \dots\dots$  est continue sur  $I = \dots\dots$  et admet pour primitive  $A : t \mapsto \dots\dots$ . Ainsi toute solution est définie sur  $\mathbb{R}$  et est de la forme

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

**1.2 Équations non homogènes**  $y'(t) - a(t)y(t) = g(t)$

**Définition** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. On appelle solution sur  $I$  de l'équation

$$y'(t) - a(t)y(t) = g(t), \quad t \in I$$

toute fonction  $f$  dérivable sur  $I$  et telle que  $\forall t \in I, f'(t) - a(t)f(t) = g(t)$ .

**Théorème 2** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. ....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
où  $A : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive de la fonction  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $C \in \mathbb{R}$  est une constante.

**Preuve.** Soient  $f$  et  $f_p$  deux solutions de l'équation (\*), on pose  $\varphi = \dots\dots\dots$ . Alors  $\varphi$  est dérivable et vérifie  $\forall t \in I$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) - a(t)\varphi(t) &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \\ &= \dots\dots\dots \end{aligned}$$

.....  
.....  
.....  
.....

■

**Remarque** Ce théorème nous dit que toute solution de l'équation (\*) se décompose comme somme d'une solution particulière de (\*) et d'une solution de l'équation homogène associée à (\*).

**Exemple** On considère l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$

$$y'(t) + 2y(t) = 4. \tag{*}$$

Chercher une solution particulière  $f_p$  sous la forme  $f_p(t) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$  puis résoudre l'équation (\*). .....

.....  
 .....  
 .....

Cherchons une solution de l'équation homogène. On a

.....

La fonction  $a : t \mapsto \dots\dots$  est continue sur  $I = \dots\dots$  est admet pour primitive  $A : t \mapsto \dots\dots$ , toute solution  $f_h$  de l'équation homogène est donc de la forme

$$f_h(t) = \dots\dots\dots$$

Finalement, toute solution de l'équation (\*) est définie sur  $\mathbb{R}$  et est de la forme

$$f(t) = f_h(t) + f_p(t) = \dots\dots\dots$$

### 1.3 Recherche de solutions particulières pour $y'(t) - a(t)y(t) = g(t)$

#### 1.3.1 Cas particuliers : si $a(t) = a \in \mathbb{R}$

Selon la forme du second membre  $g$ , on peut chercher des solutions particulières spécifiques.

- .....

On cherche une solution particulière sous la forme  $f_p(t) = \dots\dots\dots$  où

$$P \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

- .....

On cherche une solution particulière sous la forme  $f_p(t) = \dots\dots\dots$  où

$$P \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

- .....

On cherche une solution particulière sous la même forme, i.e

$$f_p(t) = \dots\dots\dots$$

- $g$  est une somme de plusieurs fonctions du type précédent :  
Si on considère le cas où  $g$  se décompose en somme de deux fonctions  $g = g_1 + g_2$  avec  $g_1$  et  $g_2$  correspondant à un des cas précédents, .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

Si  $g$  est la somme de  $n$  fonctions, on procède de la même façon en cherchant  $n$  solutions particulières aux  $n$  équations correspondantes.

**Exemple** Résoudre l'équation différentielle

$$y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t}. \tag{*}$$

Les fonctions  $a : t \mapsto \dots\dots\dots$  et  $g : t \mapsto \dots\dots\dots$  sont continues sur  $I = \dots\dots\dots$ . On commence par résoudre l'équation homogène :

.....

La fonction  $a$  admet pour primitive  $A : t \mapsto \dots\dots\dots$ , ainsi toute solution de l'équation homogène s'écrit

$$f_h(t) = \dots\dots\dots$$

Comme  $a$  est une constante, on cherche une solution particulière sous la forme  $f_p(t) = \dots\dots\dots$   
 On a pour tout  $t$  dans  $I$

$$f_p'(t) + 3f_p(t) = 2e^{-t} \Leftrightarrow \dots\dots\dots,$$

$f_p(t) = \dots\dots\dots$  est bien une solution particulière. Finalement, toute solution de (\*) est définie sur  $\mathbb{R}$  et s'écrit sous la forme

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

**1.3.2 Méthode générale : variation de la constante**

On considère  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. On appelle « méthode de variation de la constante » la méthode qui consiste à chercher une solution particulière  $f_p$  de l'équation sur  $I$

$$y'(t) - a(t)y(t) = g(t). \tag{*}$$

L'idée de la méthode est la suivante : on sait que les solutions de l'équation homogène

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0$$

s'écrivent sous la forme

$$f_h(t) = \dots\dots\dots, \forall t \in I$$

où  $A : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive de la fonction  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $C \in \mathbb{R}$  est une constante, et on va chercher une solution particulière  $f_p$  de l'équation (\*) sous la forme

$$f_p(t) = \dots\dots\dots$$

où  $\varphi$  est .....  
 .....

La constante  $C$  est remplacée par la fonction  $\varphi$ , d'où le nom de « variation de la constante ». On a alors

$$\begin{aligned} \forall t \in I, f_p'(t) - a(t)f_p(t) &= g(t) \Leftrightarrow \dots\dots\dots \\ &\Leftrightarrow \dots\dots\dots \\ &\Leftrightarrow \dots\dots\dots \\ &\Leftrightarrow \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Il suffit alors de trouver une primitive de  $t \mapsto g(t)e^{-A(t)}$  pour conclure. On peut résumer cela dans le résultat suivant :

**Théorème 3** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. Toute solution  $f$  de l'équation

$$y'(t) - a(t)y(t) = g(t), t \in I$$

est de la forme  $\forall t \in I$

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

où  $A : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive de la fonction  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  est une constante et  $B : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une primitive sur  $I$  de la fonction  $t \mapsto g(t)e^{-A(t)}$ .

**Remarque** Avant de se lancer dans les calculs de la méthode de la variation de la constante, on commence par regarder s'il n'existe pas des solutions particulières évidentes à notre équation. Par exemple si on considère l'équation suivante

$$y'(t) - 2y(t) = 2,$$

sur  $I = \dots\dots\dots$ , on voit bien qu'une solution particulière de cette équation est donnée par la fonction  $f_p(t) = \dots\dots\dots, \forall t \in \mathbb{R}$ . La fonction  $a : t \mapsto \dots\dots\dots$  est continue sur  $I$  et admet pour primitive  $A : t \mapsto \dots\dots\dots$ , ainsi toute solution de cette équation sera de la forme

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

**Exemple** Résoudre sur  $I = ]0, +\infty[$  l'équation différentielle

$$(1 + t^2)y'(t) + ty(t) - 2t = 0. \tag{*}$$

Écrivons (\*) sous la forme ..... :

$$\forall t \in I, (*) \Leftrightarrow \dots\dots\dots,$$

les fonctions  $a : t \mapsto \dots\dots\dots$  et  $g : t \mapsto \dots\dots\dots$  sont continues sur  $I$ . La fonction  $a$  admet pour primitive

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

Il nous reste à trouver une solution particulière de l'équation  $(*)$  : on la cherche sous la forme

$$f_p(t) = \dots\dots\dots$$

Alors

$$\forall t \in I, f_p'(t) = \dots\dots\dots$$

.....

et donc

$$f_p'(t) + \frac{t}{1+t^2} f_p(t) = \frac{2t}{1+t^2} \Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \dots\dots\dots$$

Ainsi, en prenant  $B = \dots$ ,  $f_p(t) = \dots\dots\dots$  convient. Les solutions de  $(*)$  sur  $I$  sont donc de la forme

$$f(t) = \dots\dots\dots$$

## 1.4 Équations avec conditions initiales

Il s'agit d'équations de la forme

$$\begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

.....  
Cette information  $y_0$  sur la valeur de la solution  $y$  en  $t = 0$  nous permet d'identifier les constantes  $C \in \mathbb{R}$  apparaissant dans la forme des solutions de l'équation.

**Exemple** Résoudre l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t} & (*) \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

Nous avons vu que toute solution de l'équation (\*) est de la forme  $f(t) = \dots\dots\dots$

.....  
**Remarque** Il arrivera que la condition initiale ne porte pas sur la valeur de la solution en  $t = 0$  mais en d'autres valeurs de  $t \in I$ , par exemple : l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) + 3y(t) = 2e^{-t} & (*) \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

admet une unique solution. En effet, comme précédemment,  $f(t) = Ce^{-3t} + e^{-t}$ ,  $C \in \mathbb{R}$  est solution de (\*)

et .....



## 2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle,  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On s'intéresse à la résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants qui sont des équations de la forme :

$$\dots\dots\dots t \in I. \quad (3)$$

- . On dit que cette équation est du **second ordre** car la dérivée d'ordre le plus élevé qu'elle fait intervenir est la dérivée **seconde** de l'inconnue du problème  $y$ .
- . On dit qu'elle est à coefficients constants car nous ne considérerons que des coefficients constants devant les membres  $y, y', y''$  de l'équation.

Nous allons voir comment résoudre cette équation (3) : dans le cas homogène *i.e* lorsque  $g = 0$  puis dans le cas non homogène lorsque  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue non-identiquement nulle.

### 2.1 Quelques rappels

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . On considère dans la suite le polynôme de degré 2 suivant :  $P(z) = az^2 + bz + c$ . On dit que  $z_0$  est une racine de  $P$  si on a  $P(z_0) = 0$  c'est à dire si  $az_0^2 + bz_0 + c = 0$ . On a le résultat suivant :

**Théorème** Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Le polynôme de degré 2 défini par :  $P(z) = az^2 + bz + c$ , possède au plus deux racines données par

- . Si  $\Delta = 0$ , on a une racine double réelle  $x = \frac{-b}{2a}$ .
- . Si  $\Delta > 0$  on a deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- . Si  $\Delta < 0$ , on a deux racines complexes **conjuguées** :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

La factorisation du polynôme est donnée par la formule, en notant  $z_1, z_2$  les racines du polynôme

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

### 2.2 Équations homogènes du 2nd ordre $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$ , $a, b \in \mathbb{R}$

**Définition** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . On appelle solution de l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$$

toute fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $I$  telle que  $\forall t \in I, f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$ .

**Définition** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . On appelle polynôme caractéristique associé à l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0,$$

le polynôme  $P_c : z \mapsto z^2 + az + b$ .

**Théorème 4** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ . On considère  $P_c$  le polynôme caractéristique associé à l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0. \quad (*)$$

1) .....,

toutes les solutions de l'équation (\*) sont de la forme,  $\forall t \in I$

$$f(t) = .....$$

2) .....,

toutes les solutions de l'équation (\*) sont de la forme,  $\forall t \in I$

$$f(t) = .....$$

3) .....,

..... toutes les solutions de l'équation (\*) sont de la forme,  $\forall t \in I$

$$f(t) = .....$$

**Remarque** Lorsque  $P_c$  a deux racines complexes distinctes  $z_1$  et  $z_2$ , les solutions de (\*) peuvent aussi s'écrire sous la forme  $\forall t \in I$

$$f(t) = K_1 e^{z_1 t} + K_2 e^{z_2 t}, \text{ avec } K_1, K_2 \in \mathbb{C},$$

grâce à l'égalité  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha e^{i\beta} = e^\alpha (\cos(\beta) + i \sin(\beta)).$$

**Exemple** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle suivante :  $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$ . (\*) .....

.....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....  
 .....

**2.3 Équations non homogènes du 2nd ordre**  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

**Définition** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On appelle solution sur  $I$  de l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t), \quad t \in I$$

toute fonction  $f$  deux fois dérivable sur  $I$  telle que  $\forall t \in I, f''(t) + af'(t) + bf(t) = g(t)$ .

**Théorème 5** Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On considère  $P_c$  le polynôme caractéristique associé à l'équation  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$  et  $f_p$  une solution particulière de l'équation

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t). \tag{*}$$

1) Si  $P_c$  a une racine double  $\alpha \in \mathbb{R}$ , toutes les solutions de l'équation (\*) sont de la forme

.....

2) Si  $P_c$  a deux racines réelles distinctes  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , toutes les solutions de l'équation (\*) sont de la

forme .....

3) Si  $P_c$  a deux racines complexes distinctes  $z_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ,  $z_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ), toutes les solutions de l'équation (\*) sont de la forme

.....

**2.4 Recherche de solutions particulières pour**  $y''(t) + ay'(t) + by(t) = g(t)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

- $g$  est un polynôme de degré  $n$  : on cherche  $f_p$  sous la forme  $f_p(t) = \dots\dots\dots$  où

$$P \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \text{ si } b \neq 0 \\ \dots\dots\dots \text{ si } b = 0 \text{ et } a \neq 0. \\ \dots\dots\dots \text{ si } a = b = 0. \end{array} \right.$$

- $\forall t \in I, g(t) = e^{\lambda t} Q(t)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $Q$  un polynôme de degré  $n$  : on cherche  $f_p$  sous la forme

$$f_p(t) = \dots\dots\dots \text{ où}$$

$$P \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \dots\dots\dots \text{ si } \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \text{ si } \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \text{ si } \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

