Université d'Aix-Marseille
L1-PEIP

Année 2017-2018
Introduction à l'Analyse

Correction du DS1 - vendredi 13 octobre 2017

Exercice 1.

1. (a) $\forall y \in F, \exists x \in E : y = f(x)$.
   (b) $\exists x, y \in E : f(x) = f(y)$ et $x \neq y$.
   (c) $\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
2.
$$f(A) = \{y \in F : \exists x \in A : y = f(x)\} \text{ et } f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$
3. (a) L'espace d'arrivée F de f est inclus dans l'espace de départ F de g (car on a égalité), l'application $g \circ f$ a donc un sens et est définie par
$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)). \end{array}$$
   (b) Supposons $g \circ f$ injective et montrons que f est aussi injective. Pour $x, x' \in E$, on a
$$\begin{array}{rcl} f(x) = f(x') & \Rightarrow & g(f(x)) = g(f(x')) \\ & \Rightarrow & (g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \\ & \Rightarrow & x = x' \text{ car } g \circ f \text{ est injective.} \end{array}$$
   On a montré que
$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x',$$
   ce qui prouve que f est injective.
4. <u>Injectivité</u> : On a $h(0,0,1) = 3 = h(1,1,0)$ et $(0,0,1) \neq (1,1,0)$, h n'est donc pas injective.
   <u>Surjectivité</u> : Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $h(y,0,0) = y$ et $(y,0,0) \in \mathcal{D}_h$ ainsi h est surjective.

Exercice 2.

1. Dressons le tableau de variations de l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pour tout x dans $\mathbb{R}, h'(x) = 2(x+1)$, h' change donc de signe en -1, on en déduit le tableau :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

   <u>Injectivité</u> : on a $h(1) = 2 = h(-2)$ et $1 \neq -2$ donc h n'est pas injective.
   <u>Surjectivité</u> : d'après le tableau, l'image de l'application h est $\mathcal{I}(h) = [-2, +\infty[$, elle n'est pas égale à l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ de h, h n'est donc pas surjective.
2. Pour que l'application $h : \mathbb{R} \to F$ soit surjective, il faut et il suffit que l'ensemble F soit égal à l'image $\mathcal{I}(h)$ de l'application h, c'est à à dire $F = [-2, +\infty[$.
3. Pour que l'application $h : E \to \mathbb{R}$ soit injective, il suffit que h soit strictement monotone sur l'ensemble E considéré. Par exemple, sur $E = [-1, +\infty[$, h est strictement croissante, elle est donc injective par théorème.
4. En combinant les réponses aux questions 2) et 3), en prenant $E = [-1, +\infty[$ et $F = [-2, +\infty[$, l'application $h : [-1, +\infty[\to [-2, +\infty[$ est bijective car strictement croissante et à valeurs dans son image. Par bijectivité, elle admet une application réciproque que nous allons déterminer en résolvant pour tout $y \in [-2, +\infty[$ l'équation $y = h(x)$ dans $[-1, +\infty[$. Pour $y \in [-2, +\infty[$ on a
$$\begin{array}{rcl} y = h(x) & \Leftrightarrow & y = (x+1)^2 - 2 \\ & \Leftrightarrow & y + 2 = (x+1)^2 \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{y+2} = (x+1)^2 \text{ car } y + 2 \geqslant 0 \\ & \Leftrightarrow & |x+1| = \sqrt{y+2} \\ & \Leftrightarrow & x + 1 = \sqrt{y+2} \text{ ou } x + 1 = -\sqrt{y+2} \\ & \Leftrightarrow & x = \sqrt{y+2} - 1 \text{ ou } x = -\sqrt{y+2} - 1. \end{array}$$

Comme on cherche la solution dans $[-1,+\infty[$, on élimine la solution $-\sqrt{y+2}-1$ (car $-\sqrt{y+2}-1 \leqslant -1$) et on conserve la solution $\sqrt{y+2}-1 \in [-1,+\infty[$. Ainsi, la réciproque de h est définie par :

$$\begin{array}{rcl} h^{-1} : [-2,+\infty[& \to & [-1,+\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{y+2}-1. \end{array}$$

Exercice 3.

1. La réciproque de P est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > 1 \Rightarrow (x > 1 \text{ ou } x \leqslant -1)$.
2. La contraposée de P est donnée par : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant 1 \Rightarrow (x \leqslant 1 \text{ et } x > -1)$.
3. La négation de P est donnée par : $\exists x \in \mathbb{R} : (x > 1 \text{ ou } x \leqslant -1)$ et $|x| \leqslant 1$.
4. L'assertion P est fausse car sa négation est vraie : en effet, il existe $x = -1$ tel que $(x > 1$ ou $x \leqslant -1)$ et $|x| \leqslant 1$.

Exercice 4.

1. (a) L'application valeur absolue notée $|.|$ est définie par

$$\begin{array}{rcl} |\,.\,| : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ x & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \end{array}$$

(b) On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^2 - 4x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Son discriminant est donné par $\Delta = 16 - 16 = 0$, P est donc sur $\mathbb{R}$ de signe constant égal à celui du terme x^2, c'est à dire positif sur $\mathbb{R}$ et s'annule uniquement en $x_0 = \frac{4}{2} = 2$. Autrement dit, $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$.

(c) Pour tout y dans $]0, \frac{1}{4}]$, vérifions que $\dfrac{1+\sqrt{1-16y^2}}{2y} \geqslant 2$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{1-16y^2}}{2y} \geqslant 2 &\Leftrightarrow 1+\sqrt{1-16y^2} \geqslant 4y \text{ car } y > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1-16y^2} \geqslant 4y - 1. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est toujours vérifiée pour y dans $]0, \frac{1}{4}]$ car $4y - 1 \leqslant 0 \leqslant \sqrt{1-16y^2}$. Ainsi, pour tout y dans $]0, \frac{1}{4}]$, on a bien $\dfrac{1+\sqrt{1-16y^2}}{2y} \geqslant 2$.

2. (a) L'application f est définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ vérifiant $x^2 + 4 \neq 0$. Or $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 4 \geqslant 4$ et ne peut donc s'annuler, ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

(b) Grâce à la parité des fonctions carré et valeur absolue, on a pour tout x dans $\mathbb{R}$, $f(-x) = \dfrac{|-x|}{(-x)^2+4} = \dfrac{|x|}{x^2+4} = f(x)$. Ceci montre que l'application f est paire.

(c) On a $f^{-1}(\{1\}) = \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \{1\}\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\}$. Or pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) = 1 &\Leftrightarrow \frac{|x|}{x^2+4} = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{|x|}{x^2+4} = 1 \text{ et } x \geqslant 0\right) \text{ ou } \left(\frac{|x|}{x^2+4} = 1 \text{ et } x \leqslant 0\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x^2+4} = 1 \text{ et } x \geqslant 0\right) \text{ ou } \left(\frac{-x}{x^2+4} = 1 \text{ et } x \leqslant 0\right) \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x + 4 = 0 \text{ et } x \geqslant 0) \text{ ou } (x^2 + x + 4 = 0 \text{ et } x \leqslant 0). \end{aligned}$$

On calcule le discriminant associé à chaque équation : on a $\Delta_1 = 1 - 16 < 0$ et $\Delta_2 = 1 - 16 < 0$. Dans les deux cas il n'y a pas de solution et donc $f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$.

(d) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $|x| \geqslant 0$ et $x^2+4>0$ donc $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+4} \geqslant 0$. De plus, pour tout x dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(x) \leqslant \frac{1}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{|x|}{x^2+4} \leqslant \frac{1}{4} \text{ et } x \geqslant 0\right) \text{ ou } \left(\frac{|x|}{x^2+4} \leqslant \frac{1}{4} \text{ et } x \leqslant 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{x^2+4} \leqslant \frac{1}{4} \text{ et } x \geqslant 0\right) \text{ ou } \left(\frac{-x}{x^2+4} \leqslant \frac{1}{4} \text{ et } x \leqslant 0\right) \\
&\Leftrightarrow \quad (x^2-4x+4 \geqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0) \text{ ou } (x^2+4x+4 \geqslant 0 \text{ et } x \leqslant 0).
\end{aligned}$$

D'après la question 1.b), l'inéquation $x^2-4x+4 \geqslant 0$ est vraie pour tout x dans $\mathbb{R}$ donc pour tout x dans $\mathbb{R}_+$. En calculant le discriminant associé à la deuxième inéquation, on obtient $\Delta = 0$, ainsi pour tout x dans $\mathbb{R}_-$, x^2+4x+4 est du signe de x^2 c'est à dire positif et l'inéquation est aussi vérifiée. Dans tous les cas ($x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 0$), on obtient $f(x) \leqslant \frac{1}{4}$.
<u>Conclusion</u> : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{4}$.

(e) D'après la question 2.a), on a $f(-1) = f(1)$ et $1 \neq -1$ donc f n'est pas injective.

(f) D'après la question 2.c), 1 appartient à l'ensemble d'arrivée de f mais ne possède pas d'antécédent par f, ainsi f n'est pas surjective.

3. (a) Pour tout x dans $[2,+\infty[$, on a $g(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ donc $g'(x) = \dfrac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-(x-2)(x+2)}{(x^2+4)^2} \leqslant 0$ car $x \geqslant 2$. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Par lecture du tableau, g étant sans discontinuité sur $[2,+\infty[$ on en déduit que $\mathcal{I}(g) =]0, \frac{1}{4}]$.

(b) g est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$ et à valeurs dans son image. Par théorème elle est donc bijective de $[2,+\infty[$ vers $\mathcal{I}(g)$.

(c) Comme g est bijective, elle admet une application réciproque que nous allons déterminer en résolvant pour tout y dans $\mathcal{I}(g)$ l'équation $y = g(x)$ dans $[2,+\infty[$. On a

$$\begin{aligned}
y = g(x) \quad &\Leftrightarrow \quad y = \frac{x}{x^2+4} \\
&\Leftrightarrow \quad yx^2 - x + 4y = 0.
\end{aligned}$$

Le discriminant associé à cette équation est $\Delta = 1 - 16y^2$. Or

$$y \in \mathcal{I}(g) \Rightarrow 0 < y \leqslant \frac{1}{4} \Rightarrow 0 < y^2 \leqslant \frac{1}{16} \Rightarrow 0 < 1 - 16y^2 \leqslant 1 \Rightarrow 0 < \Delta \leqslant 1.$$

On a donc deux solutions possibles

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2y} = \frac{1-\sqrt{1-16y^2}}{2y} \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2y} = \frac{1+\sqrt{1-16y^2}}{2y}.$$

Comme l'application g est bijective, une seule de ces deux solutions appartient à $\mathcal{D}_g = [2,+\infty[$ et il ne reste plus qu'à l'identifier. Or d'après la question 1.c), on sait que $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{1-16y^2}}{2y} \geqslant 2$, c'est à dire $x_2 \in \mathcal{D}_g$. Ainsi, la réciproque de g est donnée par

$$\begin{aligned}
g^{-1} :]0, \frac{1}{4}] \quad &\rightarrow \quad [2,+\infty[\\
y \quad &\mapsto \quad \frac{1+\sqrt{1-16y^2}}{2y}.
\end{aligned}$$