Correction du DS2 - vendredi 24 octobre 2017

Exercice 1.

1. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ est définie lorsque $1-x \neq 0$ et $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, ce qui donne $\mathcal{D}_f =]-1,1[$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

ce qui prouve que f est impaire.
$g(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)-\sqrt{5}}$ est définie lorsque $\mathrm{ch}(x) - \sqrt{5} \neq 0$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{ch}(x) - \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ch}(x) = \sqrt{5} \Leftrightarrow x = \mathrm{argch}(\sqrt{5}) \text{ ou } x = -\mathrm{argch}(\sqrt{5}),$$

ainsi $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-\mathrm{argch}(\sqrt{5}), \mathrm{argch}(\sqrt{5})\}$. De plus, en utilisant la parité de la fonction ch, pour tout $x \in \mathcal{D}_g$ on a

$$g(-x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(-x)-\sqrt{5}} = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)-\sqrt{5}} = g(x)$$

et donc g est paire.
$h(x) = \sqrt{1-|x-2|}$ est définie lorsque $1-|x-2| \geq 0$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$1-|x-2| \geq 0 \Leftrightarrow |x-2| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3,$$

ainsi $\mathcal{D}_h = [1,3]$. h n'étant pas définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0 elle n'est ni paire, ni impaire.

2. (a) Comme la fonction tangente est bijective de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$ et π-périodique sur son domaine de définition, on a

$$A = \arctan(\tan(\frac{4\pi}{3})) = \arctan(\tan(\pi + \frac{\pi}{3})) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3} \text{ car } \frac{\pi}{3} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

En utilisant la bijectivité du cosinus de $[0,\pi]$ vers $[-1,1]$, on a

$$B = \arccos(\sin(\frac{\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})) = \arccos(\cos(-\frac{\pi}{6})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{6} \text{ car } \frac{\pi}{6} \in [0,\pi].$$

(b) Soient $a, b \in]0, \frac{\pi}{4}[$. On a bien $a, b, a+b \in]0, \frac{\pi}{2}[\subset \mathcal{D}_{\tan}$ et

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&= \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\dfrac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \quad \text{car } \cos(a)\cos(b) \neq 0 \\
&= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1-\tan(a)\tan(b)} \\
&= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}
\end{aligned}$$

(c) Posons $a = \arctan(\frac{1}{2})$ et $b = \arctan(\frac{1}{3})$. Comme $0 < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$, on a par stricte croissance de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$

$$0 = \arctan(0) < \arctan(\frac{1}{3}) < \arctan(\frac{1}{2}) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, $a, b \in]0, \frac{\pi}{4}[$ et d'après la question précédente on a donc

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} = \frac{\tan(\arctan(\frac{1}{2}))+\tan(\arctan(\frac{1}{3}))}{1-\tan(\arctan(\frac{1}{2}))\tan(\arctan(\frac{1}{3}))} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1.$$

Comme $a+b \in]0, \frac{\pi}{2}[$, par identification on obtient $a+b = \frac{\pi}{4}$ et comme $C = a+b$ on en déduit que $C = \frac{\pi}{4}$.

3. (a) $\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ \cos^2(\theta) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\theta)}$.

(b) Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et d'après la question précédente appliquée à $\theta = \arctan(x)$ on obtient

$$\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2},$$

ce qui donne deux solutions

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ ou } \cos(\arctan(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Comme $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors $\cos(\arctan(x)) > 0$ et donc la seule solution possible est

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Pour tout θ dans $\mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \cos(\theta+2\theta)\\
&= \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta)\\
&= \cos(\theta)(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)) - \sin(\theta)2\sin(\theta)\cos(\theta)\\
&= \cos(\theta)(2\cos^2(\theta)-1) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta)\\
&= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2(1-\cos^2(\theta))\cos(\theta)\\
&= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta).
\end{aligned}$$

(d) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, en appliquant la formule de la question 3)c) à $\theta = \arctan(x)$ et en utilisant le résultat trouvé en 3)b), on obtient

$$\cos(3\arctan(x)) = 4\cos^3(\arctan(x)) - 3\cos(\arctan(x)) = \frac{4}{(\sqrt{1+x^2})^3} - \frac{3}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{4-3(\sqrt{1+x^2})^2}{(\sqrt{1+x^2})^3} = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

4. (a) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, posons $X = \sin(x)$, ainsi l'équation $2\sin^2(x) + 3\sqrt{2}\sin(x) - 4 = 0$ s'écrit $2X^2 + 3\sqrt{2}X - 4 = 0$. Calculons le discriminant de cette équation du second degré : on a $\Delta = (3\sqrt{2})^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 50 > 0$ ce qui donne deux racines

$$X_1 = \frac{-3\sqrt{2}-\sqrt{50}}{4} = \frac{-3\sqrt{2}-5\sqrt{2}}{4} = -8\sqrt{2} \text{ et } X_2 = \frac{-3\sqrt{2}+\sqrt{50}}{4} = \frac{-3\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De retour à la variable x, on obtient deux équations

$$\sin(x) = -8\sqrt{2} < -1 \text{ ce qui est impossible et } \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ce qui donne } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

L'ensemble des solutions à l'équation de départ est donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(b) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
4\sin(x)\cos(x) - \sqrt{3} = 0 &\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(\frac{\pi}{3})\\
&\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions à l'équation est donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 2.

1. $\forall A > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in]0, +\infty[, 0 < x < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$

2. (a) Montrons que $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = +\infty$ c'est à dire

$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{(x-1)^4}\right| > A.$$

Fixons un $A > 0$ et cherchons un tel $\delta > 0$. On a pour tout $x \neq 1$

$$\left|\frac{1}{(x-1)^4}\right| > A \Leftrightarrow |x-1|^4 < \frac{1}{A} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{A^{1/4}}.$$

En choisissant $\delta > 0$ tel que $\delta \leqslant \frac{1}{A^{1/4}}$ on obtient bien

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \delta \Rightarrow |x-1| < \frac{1}{A^{1/4}} \Rightarrow \left|\frac{1}{(x-1)^4}\right| > A.$$

$\delta = \frac{1}{A^{1/4}} > 0$ convient ce qui termine la preuve.

(b) Montrons que $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| < \delta \Rightarrow \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \epsilon.$$

Fixons un $\epsilon > 0$ et cherchons un tel $\delta > 0$. On a pour tout $x \neq 0$ en utilisant la majoration $|\sin(y)| \leq 1,\ \forall y \in \mathbb{R}$:

$$\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \times \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|.$$

En choisissant $\delta = \epsilon > 0$ on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < \delta \Rightarrow \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \delta \Rightarrow \left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| < \epsilon$$

ce qui termine la preuve.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \left|\frac{\cos(x)}{x^2+\pi}\right| \leq \frac{1}{x^2+\pi}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+\pi} = 0$, on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+\pi} = 0$.

(b)

$$\begin{aligned}
\forall x > 1,\ \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \\
&\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+.
\end{aligned}$$

(c)

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\},\quad \frac{2\tan(x)-\sin(2x)}{\sin^3(x)} = \frac{\dfrac{2\sin(x)}{\cos(x)}-2\sin(x)\cos(x)}{\sin^3(x)} = \frac{\dfrac{2}{\cos(x)}-2\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\dfrac{2(1-\cos^2(x))}{\cos(x)}}{\sin^2(x)} = \frac{2\sin^2(x)}{\cos(x)\sin^2(x)} = \frac{2}{\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2.$$

Exercice 3.

1. Comme $\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$, on en déduit que f est continue en 0.
2. On a
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \frac{-6}{0^-} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 3^+} f(x) = \frac{-6}{0^+} = -\infty,$$
comme $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$, on en déduit que f n'admet pas de limite en 3.
$\forall x \in]-\infty,-3[\cup]-3,0[$,
$$f(x) = \frac{-x^3+8x+3}{-x-3} = \frac{(x+3)(x^2-3x+1)}{x+3} = x^2-3x+1$$
et donc $\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} x^2-3x+1 = 19$.
3. f n'admet pas de limite finie en $x=3$, elle n'est donc pas prolongeable par continuité en ce point.
4. Comme f admet une limite finie en $x=-3$ elle est prolongeable par continuité en ce point et il existe donc une fonction $g:\mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\} \\ 19 & \text{si} \quad x=-3. \end{cases}$$
Par définition, g est égale à f sur $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$, et comme f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$, g l'est aussi. De plus, par sa définition, g est également continue en $x=-3$, et de fait sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Exercice 4.

1. (a) f admet une limite à droite en 0 donnée par $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{1+X} = 1$.
   (b) f admet une limite à gauche en 0 donnée par $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to-\infty} e^X = 0^+$.
   (c) Pour que f soit continue en 0 il faudrait qu'elle admette une limite finie en 0 et que cette limite soit égale à $f(0)=0$. Comme $\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$, f n'admet pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue en 0.
2. Étudions la limite en 0 de la fonction g :
$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0}(1-\cos(x)) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x}\times\frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \times\sqrt{x} = 0.$$
Comme les limites à droite et à gauche de 0 sont égales, on en déduit que la limite en 0 de g existe et vaut 0. Enfin comme $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$, on en déduit que g est continue en 0.