Corrigé du contrôle continu n°1

Exercice 1. Questions de cours

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) **[1 pt]** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ si et seulement si
   $$\forall\, A>0,\ \exists\, N\in\mathbb{N},\ \forall\, n\geq N, u_n\leq -A.$$
   (b) **[1 pt]** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 2 si et seulement si
   $$\exists\,\epsilon>0,\ \forall N\in\mathbb{N},\ \exists\, n\geq N, |u_n-2|>\epsilon.$$
2. Le but de cette question est de démontrer le théorème des gendarmes. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell\in\mathbb{R}$. On fixe un réel $\epsilon>0$.
   (a) **[1 pt]** Traduire à l'aide de quantificateurs la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ.
   On a :
   $$\forall\,\tilde{\epsilon}>0, \exists\, N_1(\tilde{\epsilon})\in\mathbb{N}, \forall\, n\geq N_1(\tilde{\epsilon}), |a_n-\ell|\leq\tilde{\epsilon}.$$
   En déduire qu'il existe un rang $N_1\in\mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont minorés par $\ell-\epsilon$.
   On pose $N_1=N_1(\epsilon)$ et on obtient
   $$\forall\, n\geq N_1, a_n\geq\ell-\epsilon.$$
   (b) **[1 pt]** De la même façon, montrer qu'il existe un rang $N_2\in\mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont majorés par $\ell+\epsilon$.
   On a :
   $$\forall\,\tilde{\epsilon}>0, \exists\, N_2(\tilde{\epsilon})\in\mathbb{N}, \forall\, n\geq N_2(\tilde{\epsilon}), |c_n-\ell|\leq\tilde{\epsilon}.$$
   On pose $N_2=N_2(\epsilon)$ et on obtient
   $$\forall\, n\geq N_2, c_n\leq\ell+\epsilon.$$
   (c) **[1 pt]** En déduire qu'il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ à partir duquel les termes de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans l'intervalle $]\ell-\epsilon,\ell+\epsilon[$.
   On pose $N=\max(N_1,N_2)$ et on obtient que pour tout $n\geq N$,
   $$\ell-\epsilon\leq a_n\leq b_n\leq c_n\leq\ell+\epsilon.$$
   (d) **[0,5 pt]** Conclure. On a montré que pour tout $\epsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, on a
   $$|b_n-\ell|\leq\epsilon,$$
   c'est-à-dire que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 &= 2\\ u_{n+1} &= \frac{3}{4}u_n-1\end{cases}$$

1. **[1 pt]** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+4$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   On a pour tout $n\in\mathbb{N}$ que
   $$v_{n+1}=u_{n+1}+4=\frac{3}{4}u_n+3=\frac{3}{4}(u_n+4)=\frac{3}{4}v_n.$$
   Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $3/4$.
2. **[1 pt]** Donner, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une expression de v_n en fonction de n.
   Montrons par récurrence que
   $$\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n 6.$$
   (a) **Initialisation.** On a bien $v_0=u_0+4=6=\left(\frac{3}{4}\right)^0 6$.

(b) **Hérédité.** Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons-là au rang $n+1$. On a

$$v_{n+1} = \frac{3}{4} v_n = \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n 6 = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} 6.$$

On a montré par récurrence que la propriété est vraie pour tout entier n.

3. **[0,5 pt]** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n en fonction de n.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$u_n = v_n - 4 = \left(\frac{3}{4}\right)^n 6 - 4.$$

4. **[1 pt]** Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme $3/4 \in]-1,1[$, la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par somme, on obtient que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -4.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{1+(u_n)^2}. \end{cases}$$

1. **[1 pt]** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n+1}$.
   (a) **Initialisation.** On a bien $u_0 = 1 = \sqrt{0+1}$.
   (b) **Hérédité.** Supposons la propriété vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons-là au rang $n+1$. On a

$$u_{n+1} = \sqrt{1+(\sqrt{n+1})^2} = \sqrt{(n+1)+1}.$$

On a montré que la propriété est vraie pour tout entier n.

2. **[1,5 pt]** En revenant à la définition formelle, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
Soit $A > 0$, on a que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq A^2$,

$$u_n = \sqrt{n+1} \geq \sqrt{n} \geq A.$$

Ainsi, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

3. **[2,5 pt]** En revenant à la définition formelle, montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $a_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est convergente.
On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{1+\frac{1}{(u_n)^2}} = 1 + \frac{1}{(u_n)^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{(u_n)^2}}+1\right)},$$

et comme $\sqrt{1+\frac{1}{(u_n)^2}} \geq 0$,

$$|1-a_n| \leq \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, on a pour tout $n \geq \epsilon^{-1}$ que $n+1 \geq \epsilon^{-1}+1 \geq \epsilon^{-1}$ et

$$|1-a_n| \leq \frac{1}{n+1} \leq \epsilon.$$

On a montré que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

4. **[0,5 pt]** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Déduire des questions précédentes que « La suite $(\frac{x_{n+1}}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge » n'est pas une condition suffisante pour que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.
Par les points 2 et 3, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un contre-exemple à cette assertion.

5. **[3 pt]** Sans revenir à la définition formelle, étudier la limite des suites $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$b_n = u_{n+1} - u_n, \quad c_n = \frac{(-1)^n}{u_n} \quad \text{et} \quad d_n = (-1)^n u_n.$$

(a) On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq b_n = u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \leq 1/u_n$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, on a que $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et le théorème des gendarmes assure que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(b) On obtient aussi que $|c_n| = 1/u_n$ donc la suite $(|c_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, tout comme $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{2n} = u_{2n}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, on a que la sous-suite $(d_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. De même, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{2n+1} = -u_{2n+1}$, on obtient que la sous-suite $(d_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$. On peut en particulier conclure que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

6. **[0,5 pt]** Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La condition « $\lim_{n\to+\infty} y_{n+1} - y_n = 0$ » est-elle suffisante pour que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente ? (Justifier votre réponse).
Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne un contre-exemple à cette assertion.

Exercice 4. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_n &= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\ v_n &= u_n + \dfrac{3}{n}. \end{cases}$$

1. **[2 pt]** Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)^2 > 0,$$

et

$$v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) + \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = \frac{n + 3n - 3(2n+1)}{n(n+1)^2} = -\frac{2n+3}{n(n+1)^2} < 0.$$

Ainsi les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont respectivement strictement croissante et décroissante.

2. **[0,5 pt]** Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n - v_n = -3/n < 0.$$

3. **[2 pt]** En revenant à la définition formelle, montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
On fixe $\epsilon > 0$. On a pour tout entier $n \geq \frac{3}{\epsilon}$ que

$$|u_n - v_n| \leq 3/n \leq \epsilon.$$

Ainsi, la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4. **[0,5 pt]** Que vient-on de montrer sur les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
On a montré que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, elles convergent donc vers une même limite.