Corrigé de l'examen du 10/05/2017

Exercice 1.

1. $\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_\epsilon \Rightarrow |u_n - \pi| < \epsilon$.
2. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - \pi| < \epsilon$.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b-a)$.
4. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un DL en 0 à l'ordre 2 s'il existe $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 et une fonction $\epsilon : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathcal{V}, f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + x^2\epsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Exercice 2.

1. $x \mapsto \frac{1}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto x^3$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Par composition et produit, f est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $|f(x)| = |x^3 \sin(\frac{1}{x})| \leqslant |x^3| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc par encadrement $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0$ et $\ell = 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 3x^2\sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x})$ et $g''(x) = (6x - \frac{1}{x})\sin(\frac{1}{x}) - 4\cos(\frac{1}{x})$.
4. On étudie la limite en 0 du taux d'accroissement $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right| = \left|\frac{x^3\sin(\frac{1}{x})}{x}\right| = \left|x^2\sin(\frac{1}{x})\right| \leqslant |x^2| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$
Par encadrement on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$. La fonction g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
5. On étudie la limite en 0 de $g'(x)$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
$|g'(x)| = |3x^2\sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x})| \leqslant |3x^2\sin(\frac{1}{x})| + |x\cos(\frac{1}{x})| = |3x^2|.|\sin(\frac{1}{x})| + |x|.|\cos(\frac{1}{x})| \leqslant 3|x^2| + |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$
Par encadrement on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g'(x) = 0$. Comme $g'(0) = 0$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} g'(x) = g'(0)$ ce qui prouve la continuité de g' en 0.
6. On étudie la limite en 0 du taux d'accroissement $\tau(x) := \dfrac{g'(x)-g'(0)}{x-0}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$\tau(x) = 3x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$. On sait que $x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0 et nous allons montrer que c'est aussi le cas du taux d'accroissement τ. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $\ell_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\tau(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ell_0$.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_n = \frac{1}{2n\pi}, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, n \in \mathbb{N}.$$
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \tau(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n\pi}\sin(2n\pi) - \cos(2n\pi) = -1 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \tau(v_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi) - \cos(\frac{\pi}{2}+2n\pi) = 0.$$
Or $\lim\limits_{x\to 0} \tau(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \tau(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \tau(v_n)$, ce qui donne $\ell_0 = -1$ et $\ell_0 = 0$ ce qui est absurde donc τ n'a pas de limite en 0 et g' n'est pas dérivable en 0.
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2\epsilon(x) \Leftrightarrow x^3\sin(1/x) = x^2\epsilon(x) \Leftrightarrow x^2 \times x\sin(1/x) = x^2\epsilon(x)$. En posant $\epsilon(x) = x\sin(1/x)$, on a bien
$$\epsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ car } |x\sin(1/x)| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \text{ et } g(x) = x^2\epsilon(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$
8. D'après les questions précédentes, il existe $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ($c_0 = c_1 = c_2 = 0$) et une fonction $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie à la question précédente) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + x^2\epsilon(x)$, avec $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, ce qui prouve bien que g admet un DL en 0 à l'ordre 2.

Exercice 3.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. La fonction $\ln$ étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\ln(b) - \ln(a) = \frac{1}{c}(b - a)$. On obtient $c = \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)}$ et comme $a < c < b$ on en déduit que $a < \frac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)} < b$.
2. Pour tout t dans $[0, 1]$, $(1 - t)a + tb \in [a, b]$. Comme la fonction $\ln$ est dérivable et de dérivée continue sur $[a, b]$ on en déduit par composition que $t \mapsto \ln((1 - t)a + tb)$ est dérivable et de dérivée continue sur $[0, 1]$. De plus, $t \mapsto -(1 - t)\ln(a) - t\ln(b)$ est dérivable et de dérivée continue sur $[0, 1]$ comme fonction polynomiale. Par somme, il en est de même pour f et
$$\forall t \in [0, 1], f'(t) = \frac{b - a}{(1 - t)a + tb} + \ln(a) - \ln(b).$$
3. $f(0) = f(1) = 0$, f étant continue et dérivable sur $[0, 1]$, on en déduit par le théorème de Rolle qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $f'(t_0) = 0$. On peut aussi déterminer la valeur de t_0 par le calcul en résolvant l'équation $f'(t_0) = 0$ ce qui donne $t_0 = \dfrac{1}{\ln(b) - \ln(a)} - \dfrac{a}{b - a}$. Il faut alors vérifier que ce t_0 est bien dans $]0, 1[$. On a
$$\begin{aligned} t_0 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln(b) - \ln(a)} - \frac{a}{b - a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b - a}{\ln(b) - \ln(a)} > a, \text{ ce qui est vrai d'après la question 1)} \\ \text{et } t_0 < 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln(b) - \ln(a)} - \frac{a}{b - a} < 1 \Leftrightarrow \frac{b - a}{\ln(b) - \ln(a)} < a + b - a = b, \text{ ce qui est vrai d'après la question 1)} \end{aligned}$$
donc le t_0 obtenu est bien dans $]0, 1[$.
4. La fonction f' est continue et dérivable pour tout $t \in [0, 1]$ satisfaisant $(1 - t)a + tb \neq 0$ c'est à dire pour $t \neq \frac{-a}{b-a}$. Or $\frac{-a}{b-a} < 0$ donc f' est dérivable pour tout $t \in [0, 1]$ et
$$f''(t) = -\frac{(b - a)^2}{[(1 - t)a + tb]^2}.$$
5. Pour tout t dans $[0, 1]$, $f''(t) < 0$ ce qui prouve que f' est strictement décroissante et on a le tableau suivant

t	0	t_0	1
f'	$f'(0)$ ↘	0 ↘	$f'(1)$
f'	$+$	$\vert$	$-$
f	0 ↗	$f(t_0)$ ↘	0

6. On a $f(0) = f(1) = 0$. D'après le tableau de variation, on a pour tout t dans $[0, 1]$ $f(t) \geqslant 0$, c'est à dire
$$\ln((1 - t)a + tb) - (1 - t)\ln(a) - t\ln(b) \geqslant 0,$$
ce qui implique
$$\ln((1 - t)a + tb) \geqslant (1 - t)\ln(a) + t\ln(b) \geqslant 0.$$

Exercice 4.

1. Pour tout x dans un voisinage de 0 on a
   1.1. $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.
   1.2. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.
   1.3. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
   1.4. $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.
   1.5. $\sinh(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout x dans un voisinage de 0, avec $x > 0$ on a

$$\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x) = \frac{1}{x}\left(\alpha x - \frac{(\alpha x)^2}{2} + o(x^2)\right) = \alpha - \frac{\alpha}{2}x + \frac{o(x^2)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \alpha \quad \text{car} \quad \frac{o(x^2)}{x} = \frac{o(x^2)}{x^2} \times x \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{\alpha}{n})} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1+\frac{\alpha}{n})} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}\ln(1+\alpha x)} = e^{\alpha}.$$

3. Pour tout x dans un voisinage de 0, on a

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x + o(x^2) \\
\sin(x)\cosh(x) &= \big(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\big)\big(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\big) = x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\sinh(x)\cos(x) &= \big(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\big)\big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\big) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).
\end{aligned}$$

Pour tout x dans un voisinage de 0 avec $x \neq 0$, on a aussi (en utilisant le DL $\frac{1}{1+u} = 1 + o(u)$ pour u proche de 0)

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x + o(x^2)} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \frac{o(x^2)}{x}} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + o(x)} = \frac{1}{x} \times (1 + o(x)),$$

ce qui donne (toujours pour x dans un voisinage de 0 avec $x \neq 0$)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cos(x)}{\sin^3(x)} &= \frac{x + \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} \times (1 + o(x))^3 \\
&= \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} \times (1 + o(x)) \\
&= \big(\frac{2}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}\big) \times (1 + o(x)) \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$