Aix-Marseille Université **Année 2016-2017**
Licence Mathématiques et Informatique - 1ère année Introduction à l'Analyse

---

Corrigé de l'examen du 19/06/2017
Seconde session

Exercice 1.

a) $h^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - x = 0\} = \{0, \frac{1}{2}\}$.

b) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} h(x) > -3 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - x > -3 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 - x + 3 > 0. \end{aligned}$$

On étudie le signe du polynôme $P : x \mapsto 2x^2 - x + 3$ sur $\mathbb{R}$. Son discriminant vaut $\Delta = -23 < 0$ donc P est du signe de 2 c'est à dire positif. Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $P(x) > 0$ ce qui prouve bien que $h(x) > -3$, toujours pour tout x dans $\mathbb{R}$.

c) h n'est pas injective car d'après la question a) 0 admet deux antécédents distincts. Elle n'est pas non plus surjective car d'après la question b),-4 n'admet pas d'antécédent.

Exercice 2.
Déterminons A : On considère dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$|x+1| \leqslant x^2 - 1. \quad (\star)$$

• Si $x \in]-\infty, -1]$ alors

$$(\star) \Leftrightarrow -x - 1 \leqslant x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + x \geqslant 0 \Leftrightarrow x(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[,$$

et on note $A_1 = (]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[) \cap]-\infty, -1] =]-\infty, -1]$.

• Si $x \in [-1, +\infty[$ alors

$$(\star) \Leftrightarrow x + 1 \leqslant x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[,$$

et on note $A_2 = (]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[) \cap [-1, +\infty[= [2, +\infty[$.

Finalement,

$$A = A_1 \cup A_2 =]-\infty, -1] \cup [2, +\infty[.$$

Déterminons B : On considère dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$2|x+3| > |x-7|. \quad (\star\star).$$

• Si $x \in]-\infty, -3]$ alors

$$(\star\star) \Leftrightarrow 2(-x-3) > 7 - x \Leftrightarrow -13 > x,$$

et on note $B_1 =]-\infty, -13[\cap]-\infty, -3] =]-\infty, -13[$.

• Si $x \in [-3, 7]$ alors

$$(\star\star) \Leftrightarrow 2(x+3) > 7 - x \Leftrightarrow x > \frac{1}{3},$$

et on note $B_2 =]\frac{1}{3}, +\infty[\cap [-3, 7] =]\frac{1}{3}, 7]$.

• Si $x \in [7, +\infty[$ alors

$$(\star\star) \Leftrightarrow 2(x+3) > x - 7 \Leftrightarrow x > -13,$$

et on note $B_3 =]-13, +\infty[\cap [7, +\infty[= [7, +\infty[$.
Finalement,

$$B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 =]-\infty, -13[\cup]\frac{1}{3}, 7] \ \cup \ [7, +\infty[=]-\infty, -13[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[.$$

Par ailleurs,

$$A \cup B =]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[\text{ et } A \cap B =]-\infty, -13[\cup]2, +\infty[.$$

Exercice 3.

a) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $1+x^2>0$ donc le domaine de définition et de dérivabilité de f est $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}\cos(2x) - 2\ln(1+x^2)\sin(2x).$$

b) Les applications $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}^*$, par composition g est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} \times \frac{1}{x^2} + e^{\frac{1}{x}} \times \frac{-2x}{x^4} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} \times (1+2x).$$

Exercice 4.

a) Le domaine de définition de h est donné par

$$\mathscr{D}_h = \{x \in \mathbb{R} : \cos(x) > 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} : -\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[.$$

b) h étant continue sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ elle admet donc une primitive sur cet intervalle. On a à l'aide d'une intégration par parties en posant $u(x) = \ln(\cos(x))$ et $v'(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)\ln(\cos(x))dx &= -\cos(x)\ln(\cos(x)) - \int \cos(x)\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx \\
&= -\cos(x)\ln(\cos(x)) + \cos(x) \\
&= \cos(x)(1-\ln(\cos(x)),
\end{aligned}$$

et $H : x \mapsto \cos(x)(1-\ln(\cos(x))$ est une primitive de h sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

c) En utilisant la question b), on a : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)\ln(\cos(x))dx = \big[\cos(x)(1-\ln(\cos(x))\big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\ln(\frac{\sqrt{2}}{2})) - 1.$

Exercice 5.

a) À l'aide de deux intégrations par parties successives (en posant $u(x) = x^2$, $v'(x) = \sin(x)$ pour la première, puis $\tilde{u}(x) = 2x$, $\tilde{v}'(x) = \cos(x)$ pour la seconde), on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2\sin(x)dx &= \big[-x^2\cos(x)\big]_0^\pi + \int_0^\pi 2x\cos(x)dx \\
&= -\pi^2\cos(\pi) + \big[2x\sin(x)\big]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin(x)dx \\
&= \pi^2 + 2\pi\sin(\pi) + \big[2\cos(x)\big]_0^\pi \\
&= \pi^2 + 2\cos(\pi) - 2\cos(0) \\
&= \pi^2 - 4.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx &= \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx \\
&= \int_0^1 \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}dx \text{ avec } u(x) = 1+x^2 \\
&= \Big[\sqrt{u(x)}\Big]_0^1 \\
&= \Big[\sqrt{1+x^2}\Big]_0^1 \\
&= \sqrt{2} - \sqrt{1}.
\end{aligned}$$

Exercice 6.

a) Les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = 0$$

sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont de la forme $f(x) = Ce^{A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$ est une constante et $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$, c'est à dire

$$f(x) = Ce^{x^2}, C \in \mathbb{R}.$$

b) Les solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) - 2xy(x) = x, \quad (\star)$$

sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont de la forme

$$f(x) = Ce^{A(x)} + f_p(x),$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$ et $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation $(\star)$. Nous allons chercher f_p sous la même forme que le second membre de $(\star)$, c'est à dire sous la forme d'un polynôme du 1er degré. Trouvons $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que $f_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par $f_p(x) = ax + b$, soit solution de $(\star)$:

$$\begin{aligned} f_p'(x) - 2xf_p(x) = x &\Leftrightarrow a - 2x(ax+b) = x \\ &\Leftrightarrow -2ax^2 - x(2b+1) + a = 0 \\ &\Leftrightarrow -2a = 2b+1 = a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0, b = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow f_p(x) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de $(\star)$ sont toutes de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = Ce^{x^2} - \frac{1}{2},\ C \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, $f(0) = 0 \Leftrightarrow Ce^{0^2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{2}$, ce qui prouve que l'équation différentielle $(\star)$ avec condition initiale $y(0) = 0$ admet pour unique solution la fonction $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^{x^2} - 1).$$