Correction DS2 Maths PEIP1, année 2018-2019

Exercice 1

1.
$$\arccos \ : \ [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$\arctan \ : \ \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$

2.
$$\forall \varepsilon>0\ \exists \eta>0\ \forall x\in\mathbb{R},\ |x-2|<\eta \implies |f(x)-4|<\varepsilon,$$
$$\forall A\in\mathbb{R}\ \exists B\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R},\ x>B \implies f(x)<A,$$
$$\exists M\in\mathbb{R}\ \forall x\in\mathbb{R} f(x)<M.$$

3. *Soit $\varepsilon>0$, soit $x\in\mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :*
$$\begin{aligned} &|g(x)-7|<\varepsilon\\ \iff &|5x-3-7|\leq\varepsilon\\ \iff &5|x-2|\leq\varepsilon\\ \iff &|x-2|\leq\frac{\varepsilon}{5}.\end{aligned}$$
Donc en posant $\eta=\frac{\varepsilon}{5}$ on a bien l'implication $\forall x\in\mathbb{R},\ |x-2|<\eta \implies |g(x)-7|<\varepsilon$.

4. *Soit $A<0$, soit $x>1$.*
Comme on va élever au carré, il faut choisir le signe de A, négatif car on regarde une limite égale à $-\infty$. Et on prend $x>1$ pour que tout soit bien défini
On a alors les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} &-\sqrt{x-1}<A\\ \iff &\sqrt{x-1}>-A\\ \iff &x-1>A^2 \quad \mathrm{car A}<0\\ \iff &x>A^2+1\end{aligned}$$
Donc en posant $B=A^2+1$ on a bien l'implication $\forall x>1,\ x>B \implies h(x)<A$.

Exercice 2

1. *f est définie si et seulement si $4-|1-2x|\geq 0$. Soit $x\in\mathbb{R}$, on a les équivalences :*
$$\begin{aligned} &4\geq|1-2x|\\ \iff &-4\leq 1-2x\leq 4\\ \iff &-5\leq -2x\leq 3\\ \iff &\frac{-3}{2}\leq x\leq\frac{5}{2}.\end{aligned}$$
Donc $D_f=[\frac{-3}{2},\frac{5}{2}]$

2. *g est définie ssi $|x-1|-|2x-4|>0$. Il faut distinguer quatre cas selon les signes de $x-1$ et $2x-4$. On a donc*
   - *Cas 1 : $x\geq1$, $x\geq2$. Alors $|x-1|-|2x-4|>0 \iff x-1-2x+4>0 \iff x<3$.*
   - *Cas 2 : $x\geq1$, $x\leq2$. Alors $|x-1|-|2x-4|>0 \iff x-1+2x-4>0 \iff x>\frac{5}{3}$.*
   - *Cas 3 : $x\leq1$, $x\leq2$. Alors $|x-1|-|2x-4|>0 \iff 1-x+2x-4>0 \iff x>3$, ce qui est donc impossible puisque $x\leq1$.*
   - *Cas 4 : $x\leq1$, $x\geq2$, impossible. Le domaine de définition est finalement l'union des domaines obtenus dans chacun des cas, c'est-à-dire $[2,3[\cup]\frac{5}{3},2]=]\frac{5}{3},3[$.*

3. g *est définie ssi* $x^2+1 \geq 0$ *et* $\cos(2x)-sin(x) \neq 0$. *On a d'abord* $x^2+1>0$ *pour tout* x. *Résolvons ensuite l'équation* $\cos(2x)-sin(x)=0$. *Ceci équivaut à*

$$\begin{aligned}
&\exists k\in\mathbb{Z},\quad 2x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad 2x=-\frac{\pi}{2}+x+2k\pi\\
\iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi.
\end{aligned}$$

Donc $D_h=\mathbb{R}\setminus\left(\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\}\right)$

Exercice 3 1.

$$\begin{aligned}
&\sin(2x-\frac{5\pi}{4})=\sin(\frac{\pi}{4}-x)\\
\iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad 2x-\frac{5\pi}{4}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad 2x-\frac{5\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi\\
\iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad 3x=\frac{6\pi}{4}+2k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\pi+\frac{4\pi}{4}+2k\pi\\
\iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=2\pi+2k\pi.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2.

$$\begin{aligned}
&\cos(x+\frac{3\pi}{4})=\sin(2x+\frac{\pi}{3})\\
\iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad x+\frac{3\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-2x-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad x+\frac{3\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2x+\frac{\pi}{3}+2k\pi\\
\iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad 3x=\frac{-9\pi}{12}+\frac{6\pi}{12}-\frac{4\pi}{12}+2k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad -x=-\frac{3\pi}{4}-\frac{6\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}+2k\pi\\
\iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad x=-\frac{7\pi}{36}+\frac{2}{3}k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{11\pi}{12}+2k\pi.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est : $S=\left\{-\frac{7\pi}{36}+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

3.

$$\begin{aligned}
&\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2}\\
\iff&\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\\
\iff&\cos(\frac{\pi}{6})\cos(x)-\sin(\frac{\pi}{6})\sin(x)=\cos(\frac{\pi}{4})\\
\iff&\cos(\frac{\pi}{6}+x)=\cos(\frac{\pi}{4})\\
\iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{6}+x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad \frac{\pi}{6}+x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\
\iff&\exists k\in\mathbb{Z},\quad x=\frac{\pi}{12}+2k\pi \quad ou \quad \exists k\in\mathbb{Z},\quad x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions est $S=\{\frac{\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{-\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 4

1. *cos*$(2x)$ = 2 *cos*$^2(x)$ - 1 **(0,5 pt)**

2. *cos* $(3x)$ = *cos*(x) *cos* $(2x)$ - *sin*(x) *sin*$(2x)$ = *cos*(x) (2 *cos*$^2(x)$ - 1) - *sin*(x) *sin*$(2x)$ = 2 *cos*$^3(x)$ - *cos*(x) - 2 *sin*(x) *sin* (x) *cos*(x) = 2 *cos*$^3(x)$ - *cos*(x) - 2 *cos*(x) (1 - *cos*$^2(x)$) = 2 *cos*$^3(x)$ - *cos*(x) - 2 *cos*(x) + 2 *cos*$^3(x)$ = 4 *cos*$^3(x)$ - 3 *cos*(x) **(1 pt)**

3. sin $(3x)$ = sin(x) cos$(2x)$ + sin$(2x)$ cos(x) = sin(x) [2 cos^2(x) - 1] + 2 sin(x) cos(x) cos(x) = sin(x) [2 cos^2(x) - 1 + 2 cos$^2(x)$] = sin(x) [4 cos^2(x) - 1] **(1 pt)**

4. cos $(5x)$ = cos $(3x)$ cos $(2x)$ - sin $(3x)$ sin$(2x)$ = (4 cos$^3(x)$ - 3 cos(x)) (2 cos$^2(x)$ - 1) - 2 sin(x) [4 cos^2(x) - 1] sin(x) cos(x) = (4 cos$^3(x)$ - 3 cos(x)) (2 cos$^2(x)$ - 1) - 2 (1 - cos$^2(x)$) [4 cos^2(x) - 1] cos(x) = 8 cos$^5(x)$ -6 cos$^3(x)$ -4 cos$^3(x)$ + 3 cos(x) - (2 cos(x) - 2 cos$^3(x)$) [4 cos^2(x) - 1] = 8 cos$^5(x)$ -6 cos$^3(x)$ -4 cos$^3(x)$ + 3 cos(x) - 8 cos$^3(x)$ + 2 cos(x) + 8 cos$^5(x)$ - 2 cos$^2(x)$ = 16 cos$^5(x)$ - 20 cos$^3(x)$ + 5 cos(x) **(1,5 pt)**

Exercice 5

1. Arctan est strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et Arctan 1 = $\frac{\pi}{4}$. Donc Arctan(2), Arctan(5) et Arctan(8) appartiennent à l'intervalle $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. Par somme, on obtient le résultat **(1 pt)**.

2. On utilise la formule tan$(a + b)$ = $\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\ \tan(b)}$ **(0,5 pt)**.

3. On sait que tan(a+b) = $\frac{sin(a+b)}{cos(a+b)} = \frac{sin(a)cos(b)+sin(b)cos(a)}{cos(a)cos(b)-sin(a)sin(b)}$ **(1 pt)**
On factorise par cos(b) au numérateur et au dénominateur, et on obtient tan$(a + b)$ = $\frac{\sin(a)+\tan(b)\cos(a)}{\cos(a)-\sin(a)\tan(b)}$.
On factorise par cos(a) au numérateur et au dénominateur, et on remplace les $\frac{sin(x)}{cos(x)}$ par tan(x). On obtient bien le résultat demandé.

4. tan(B) = tan(arctan(2) + arctan(5)) = $\frac{2+5}{1-2\times 5} = -\frac{7}{9}$ **(0,5 pt)**.

5. tan A = tan((Arctan 2 + Arctan 5) + Arctan 8) = $\frac{-7/9+8}{1-(-7/9)\times 8} = \frac{65/9}{65/9} = 1$. A = $\frac{\pi}{4} + k\pi$. La question 1 donne alors k = 1, donc A = $\frac{\pi}{4}$ **(1 pt)**.

Exercice 6

1. $\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-8} = \frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}+2)} \times \frac{(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+3}+2}$ tend vers $\frac{3}{2}$ lorsque x tend vers 1 **(1,5 pt)**.

2. $\frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-2}$ = x - 1, tend vers 1 lorsque x tend vers 2 **(1 pt)**.

3. $x - ln(x) = x(1 - ln(x)/x)$. Comme la limite de $ln(x)/x$ est connue en l'infini (c'est zéro), alors la limite sera celle de x, donc l'infini **(0,5 pt)**.