Fonctions, limites et continuité : bilan

NOM : **Prénom :**

Cocher la (ou les) case(s) correspondante(s) aux énoncés suivants :

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante si et seulement si

   - ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha$.
   - ☐ $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha$.
   - ☐ $\exists x \in \mathbb{R} : \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha$.
   - ☒ $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha$.
   - ☐ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha$.
   - ☒ $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$.
   - ☐ $\exists x, y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y)$.
   - ☒ $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$.

2. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est majorée si et seulement si

   - ☐ $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : -f(x) \geqslant M$.
   - ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : f(x) \geqslant M$.
   - ☒ $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$.
   - ☐ $\exists x \in \mathbb{R} : \forall M \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant M$.
   - ☐ $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant M$.
   - ☐ $\exists M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant M$.
   - ☒ $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, -f(x) \geqslant M$.
   - ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant M$.

3. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique si et seulement si

   - ☐ $\exists T > 0, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = T$.
   - ☒ $\exists T > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.
   - ☐ $\exists T > 0, \exists x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$.
   - ☐ $\exists x \in \mathbb{R} : \forall T > 0, f(x+T) = f(x)$.
   - ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T > 0 : f(x+T) = f(x)$.
   - ☐ $\forall T > 0, \exists x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$.

4. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire si et seulement si

   - ☐ $\exists x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$.
   - ☐ $\exists x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$.
   - ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$.
   - ☒ $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.
   - ☐ $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
   - ☐ $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : y = f(-x)$.

5. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante si et seulement si

   - ☒ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
   - ☐ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
   - ☐ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
   - [☐ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant f(x+1)$.] Ce critère fonctionne si f est continue mais il est faux en général !
   - ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(x+1)$.
   - ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant f(y)$.

6. Soient $\ell \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f a pour limite ℓ en x_0 si et seulement si

   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☒ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \epsilon| < \ell$.
   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\exists \delta > 0 : \forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| > \epsilon$.
   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : |x - x_0| > \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 : \forall \epsilon > 0, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \epsilon| < \ell$.

7. Soient $\ell \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f ne tend pas vers ℓ lorsque x tend vers x_0 si et seulement si

   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \geqslant \epsilon$.
   - ☐ $\forall \delta > 0 : \exists \epsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☒ $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta$ et $|f(x) - \ell| \geqslant \epsilon$.
   - ☐ $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \geqslant \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \geqslant \epsilon$.
   - ☐ $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \geqslant \delta$ ou $|f(x) - \ell| \geqslant \epsilon$.

8. Soient $\ell \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que ℓ est limite à droite en x_0 de f si et seulement si

   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R} : x_0 < x < x_0 + \delta$ et $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☒ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \exists x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ et $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\exists \delta > 0 : \forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R} : x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.
   - ☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0^+| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| > \epsilon$.

9. Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f a pour limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si

☐ $\forall B > 0, \exists \epsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$

☐ $\forall \epsilon > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - \ell| < \epsilon \Rightarrow f(x) > B.$

☐ $\forall \epsilon > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$

☐ $\forall \epsilon > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - B| < \epsilon \Rightarrow f(x) > \ell.$

☐ $\forall B > 0, \exists \epsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - \ell| < \epsilon \Rightarrow f(x) < -B.$

☒ $\forall \epsilon > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x)$ tend vers 9 lorsque x tend vers 3 si et seulement si

☐ $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - 9| < \delta \Rightarrow |x^2 - 3| < \epsilon.$

☐ $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 3| < \delta \Rightarrow |x^2 - 9| < \epsilon.$

☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x^2 - 9| < \delta \Rightarrow |x - 3| < \epsilon.$

☒ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - 3| < \delta \Rightarrow |x^2 - 9| < \epsilon.$

☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - 9| < \delta \Rightarrow |x^2 - 3| < \epsilon.$

☐ $\exists \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - 3| < \epsilon \Rightarrow |x^2 - 9| < \delta.$

11. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On dit que $f \leqslant g$ si et seulement si

☐ $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant g(x).$

☒ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant g(x).$

☐ $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$

☐ $\exists x, y \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant g(y).$

☒ $\forall x \in \mathbb{R}, (f - g)(x) \leqslant 0.$

☐ $\forall x \in \mathbb{R}, (f - g)(x) > 0.$

12. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si

☒ $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-M, M].$

☐ $\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-M, M].$

☐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| \leqslant M.$

☒ $\exists M \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant M.$

☒ $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant f(x) \leqslant M.$

☐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leqslant f(x) < M.$

☐ $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R} : m \leqslant f(x) \leqslant M.$

☐ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}_+ : -M \leqslant f(x) < M.$

13. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0 si et seulement si

☐ $\forall B > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - \delta| < x_0 \Rightarrow f(x) < -B.$

☐ $\forall \delta > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow |f(x) - x_0| < \delta.$

☐ $\forall B > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > B.$

☒ $\forall B > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B.$

☐ $\forall \delta > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -B.$

☐ $\exists B > 0 : \forall \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > \delta \Rightarrow |f(x) - x_0| < B.$

14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$ si et seulement si

☐ $\forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow f(x) < A.$

☐ $\forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x < -A \Rightarrow f(x) > B.$

☐ $\forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow f(x) < -B.$

☐ $\forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > B \Rightarrow f(x) < -A.$

☒ $\forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x < -B \Rightarrow f(x) > A.$

☐ $\forall B > 0, \exists A > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x < -B \Rightarrow f(x) > A.$

15. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$ vaut

☐ 0^+ ☒ 0^- ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$

(b) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)}$ vaut

☒ 0^+ ☐ 0^- ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$

(c) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^+$ alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{-1}{f(x)}$ vaut

☐ 0^+ ☐ 0^- ☐ $+\infty$ ☒ $-\infty$

(d) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0^-$ alors $\lim_{x \to x_0} \dfrac{-1}{f(x)}$ vaut

☐ 0^+ ☐ 0^- ☒ $+\infty$ ☐ $-\infty$

16. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{x^5+2x-1}{2x^4-3x+1}$ tend vers

~~☒ 0^+~~ ☐ 0^- ☒ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2

17. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{x^4+2x-1}{2x^4-3x+1}$ tend vers

☐ 0^+ ☐ 0^- ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 1 ☒ $\frac{1}{2}$ ☐ 2

18. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{x^3+2x-1}{2x^4-3x+1}$ tend vers

☒ 0^+ ☐ 0^- ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2

19. Lorsque x tend vers 0, $\dfrac{\sin(x)}{x}$ tend vers

☐ 0^+ ☐ 0^- ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ π ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☒ 1

20. Lorsque x tend vers 0^+, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ tend vers

☐ 0^+ ☐ 0^- ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☒ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2

21. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln(x)}{x}$ tend vers

☒ 0^+ ☐ 0^- ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2

22. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{e^x}{x}$ tend vers

☐ 0^+ ☐ 0^- ☒ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2

23. Lorsque x tend vers 0^+, $x\ln(x)$ tend vers

☐ 0^+ ☒ 0^- ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2

24. Lorsque x tend vers 0^+, $e^x\ln(x)$ tend vers

☐ 0^+ ☐ 0^- ☐ $+\infty$ ☒ $-\infty$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2

25. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln(x)}{e^x}$ tend vers

☒ 0^+ ☐ 0^- ☐ $+\infty$ ☐ $-\infty$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2

26. On dit que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue en $x_0\in\mathbb{R}$ si et seulement si

☐ $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in\mathbb{R},|x-\delta|<x_0\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\epsilon.$

☐ $\exists\epsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in\mathbb{R},|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\epsilon.$

☒ $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in\mathbb{R},|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\epsilon.$

☐ $\forall\epsilon>0,\forall\delta>0,\exists x\in\mathbb{R}:|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\epsilon.$

☐ $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in\mathbb{R},|x-x_0|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\epsilon.$

☐ $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0:\forall x\in\mathbb{R},|x-x_0|>\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\epsilon.$

27. On considère $\ell,\tilde{\ell}\in\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ et $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux applications. Cocher la (ou les) assertion(s) suivante(s) vraie(s).

☒ Si f admet ℓ pour limite en x_0 alors ses limites à droite et à gauche en x_0 coincident.

☐ Si f admet ℓ pour limite en x_0 alors ses limites à droite et à gauche en x_0 peuvent être différentes.

☒ Si une fonction a une limite en un point alors cette limite est unique.

☐ Une fonction peut avoir plusieurs limites différentes en un point.

☐ Si $f\leqslant g$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\tilde{\ell}$ alors $\ell\geqslant\tilde{\ell}$.

☒ Si $f\leqslant g$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\tilde{\ell}$ alors $\ell\leqslant\tilde{\ell}$.

☐ Si $f\leqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$.

☐ Si $f\leqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

☒ Si $f\leqslant g$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$.

☐ Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ alors f est prolongeable par continuité en x_0.

☒ Si f admet une limite finie en x_0 alors f est prolongeable par continuité en x_0.