Corrigé devoir numéro 1

Exercice 1

1. f est injective.
2. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$.
3. $\exists x \in E,\ \exists x' \in E,\ f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$.
4. $\forall y \in F\ \exists x \in E,\ f(x) = y$.
5. Notons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.
   Alors f n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$. Par contre f est surjective. En effet, soit $y \in \mathbb{R}^+$. Notons $x = \sqrt{y}$, alors $f(x) = \sqrt{y}^2 = |y| = y$ car $y \geq 0$. On a donc montré que $\forall y \in \mathbb{R}^+\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$.
6. Si une fonction est strictement monotone, alors elle est injective.

Exercice 2

1. $\sqrt{x^2+1}$ est défini si et seulement si $x^2 + 1 \geq 0$, ce qui est toujours vrai pour $x \in \mathbb{R}$ car le carré d'un réel est positif.
2. Déterminons d'abord le sens de variation de f.
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Donc $g'(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$. Ainsi g est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
   Comme g est continue et croissante sur $[0,1]$, on a $g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [1, \sqrt{2}]$.
   De plus, comme g est continue et décroissante sur $[-1,0]$, on a $g([-1,0]) = [g(0), g(-1)] = [1, \sqrt{2}]$. Donc $g([-1,1]) = g([-1,0]) \cup g([0,1]) = [1, \sqrt{2}]$.
3. Montrons d'abord que $\Im g \subset [1, \infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors
   $$\begin{aligned} & 0 \leq x^2 \\ \implies & 1 \leq x^2 + 1 \\ \implies & 1 \leq \sqrt{x^2+1}, \end{aligned}$$
   car la fonction racine carrée est strictement croissante. On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 1$, donc $\Im g \subset [1, \infty[$.
   Réciproquement, soit $y \geq 1$. Résolvons l'équation $y = g(x)$:
   $$\begin{aligned} & g(x) = y \\ \iff & \sqrt{x^2+1} = y \\ \iff & x^2 + 1 = y^2 \quad \text{car la fonction racine est croissante} \\ \iff & x^2 = y^2 - 1 \\ \iff & x = \sqrt{y^2-1} \text{ ou } x = -\sqrt{y^2-1}. \end{aligned}$$
   La solution $\sqrt{y^2-1}$ est bien définie pour $y \geq 1$ donc $[1, \infty[\subset \Im g$.
   Donc $\Im g = [1, +\infty[$.
4. Cette question présente une difficulté que la plupart des élèves n'ont pas vue : on peut avoir $g(A) = B$ mais $g^{-1}(B) \neq A$. Par exemple dans la question 2), les deux ensembles $[0,1]$ et $[-1,1]$ ont la même image directe, mais ils ne peuvent pas tous les deux être image réciproque de $[1, \sqrt{2}]$! Par ailleurs il ne faut surtout pas confondre l'image réciproque et l'application réciproque. Ici l'application réciproque n'est pas définie car g n'est ni injective ni surjective.

— On a vu dans la question 2) que $g([-1,1]) = [1,\sqrt{2}]$. Ceci prouve que $[-1,1] \subset g^{-1}([1,\sqrt{2}])$.
Par définition, $g^{-1}([1,\sqrt{2}]) = \{x \in \mathbb{R}, g(x) \in [1,\sqrt{2}]\}$.
Comme g est paire, on va chercher séparément les $x \geq 0$ et les $x \leq 0$ tels que $1 \leq g(x) \leq \sqrt{2}$. Soit $x \geq 0$. Comme g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a l'équivalence $g(0) \leq g(x) \leq g(1) \iff 0 \leq x \leq 1$.
De même, soit $x \leq 0$. Comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, on a l'équivalence $g(0) \leq g(x) \leq g(-1) \iff -1 \leq x \leq 0$.
On a ainsi montré que $1 \leq g(x) \leq \sqrt{2}$ implique que $x \in [-1,0]$ ou $x \in [0,1]$. Donc $g^{-1}([1,\sqrt{2}]) \subset [-1,1]$.
Donc $g^{-1}([1,\sqrt{2}]) = [-1,1]$.

— On a vu dans la question 3) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 1$. Donc $g^{-1}([1,+\infty[) = \mathbb{R}$.

— Il suffit de résoudre l'équation $g(x) = \sqrt{2}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} & g(x) = \sqrt{2} \\ \iff & x^2 + 1 = 2 \\ \iff & x^2 = 1 \\ \iff & x = 1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

Donc $g^{-1}(\{\sqrt{2}\}) = \{-1,1\}$.

— L'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solutions car $\Im g = [1,+\infty[$. Donc $g^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

5. g n'est pas injective car $g(1) = g(-1)$.
6. g n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent d'après la question 4).
7. Posons $I = \mathbb{R}^+$ et $J = [1,+\infty[$. Soit $y \geq 1$. Résolvons l'équation $\tilde{g}(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2+1} = y \\ \iff & x^2 + 1 = y^2 \\ \iff & x^2 = y^2 - 1 \\ \iff & x = \sqrt{y^2-1}. \end{aligned}$$

La dernière équivalence est vraie car $x \geq 0$ et $y \geq 1$. Ainsi l'équation $\tilde{g}(x) = y$ a une unique solution dans I pour tout $y \in J$, donc $\tilde{g}$ est bijective de I dans J et on a pour tout $y \in J$

$$\tilde{g}^{-1}(y) = \sqrt{y^2-1}.$$

Exercice 3 Attention dans cet exercice à ne pas confondre l'ensemble $h(\{0\})$ et le réel $h(0)$.
On a $A \cap A' = \{0\}$. Donc $h(A \cap A') = h(\{0\}) = \{h(0)\} = \{0\}$.
Comme h est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ on a $h([-1,0]) = [h(0), h(-1)] = [0,1]$. Comme h est croissante sur $\mathbb{R}^-$ on a $h(A') = h([0,1]) = [h(0), h(1)] = [0,1]$.
Donc $h(A) \cap h(A') = [0,1]$.
On a $h(A) \cup h(A') \neq h(A \cup A')$, l'image de l'intersection n'est en général pas égale à l'intersection des images.

Exercice 4

1.
2. On va traiter à la fois les questions 1) et 2) : Soit $y \in \mathbb{R}$, résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow & \frac{3+2x}{2-x} = y \\ \Leftrightarrow & 3 + 2x = y(2-x) \\ \Leftrightarrow & 2x + xy = 2y - 3 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{2y-3}{y+2}. \end{aligned}$$

L'équation admet au plus une solution, donc f est injective.
L'équation n'admet pas de solution pour $y = -2$, donc f n'est pas surjective.

3. En prenant $E = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $F = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, l'équation $y = \tilde{f}$ admet une unique solution dans E pour tout $y \in F$ d'après la question précédente. Donc $\tilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ est bijective.
4. L'application réciproque est donnée par la solution de l'équation $\tilde{f}(x) = y$: pour tout $y \in F$ on a :

$$\tilde{f}^{-1}(y) = \frac{2y - 3}{y + 2}.$$