POLYTECH MARSEILLE
Alx Marseille Université

Introduction à l'analyse

PEIP 1ère année

DEVOIR SURVEILLÉ 2

Vendredi 15 novembre 2019

2019-2020

Durée : 2h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

NOM : .... PRÉNOM : .... GROUPE : ....

PARTIE 1 : /11 PARTIE 2 : /11 NOTE FINALE : /20

5 croix = −0,25 pt

PARTIE 2

Problème. [11points] Le but de cet problème est de résoudre l'équation suivante

$$\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (\star)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition E de l'équation $(\star)$. **[0,5point]**
Indication : on pourra s'aider des questions posées à l'Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$(\ast)$ est définie lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $\frac{x}{3} \in \mathbb{R}$ et $\frac{x}{2} \in [-1,1]$
Ainsi, $E = [-2,2]$

2. (a) Compléter : $\arctan(0) = 0$ et $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ **[0,5point]**

(b) En déduire que 0 n'est pas solution de l'équation $(\star)$. **[0,25point]**
On a $\arctan(0) - \arctan\left(\frac{0}{3}\right) = 0$
et $\arccos\left(\frac{0}{2}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$
Donc $\arctan(0) - \arctan\left(\frac{0}{3}\right) \neq \arccos\left(\frac{0}{2}\right)$
0 n'est donc pas solution de $(\ast)$

3. (a) Montrer que pour tout x dans E, $\tan(\arctan(x)) \times \tan(\arctan(\frac{x}{3})) \neq -1$. **[0,5point]**

Soit $x \in E$. On a $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\arctan\left(\frac{x}{3}\right) \in]-\pi/2, \pi/2[$

Donc $\tan(\arctan(x)) \times \tan\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right) = x \times \frac{x}{3} = \frac{x^2}{3}$

Or $\frac{x^2}{3} \geq 0$. Donc $\frac{x^2}{3} \neq -1$

Ainsi, $\forall x \in E$, $\tan(\arctan(x)) \times \tan\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right) \neq -1$

(b) En déduire que pour tout x dans E,

$$\tan\left(\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right) = \frac{2x}{x^2+3}.$$

Indication : on pourra s'aider des formules trigonométriques énoncées à l'Exercice 6. **[1point]**

On applique la question 5) Ex6. à $a = \arctan(x)$ et $b = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$. Pour $x \in E$

Si $x \in E$, alors $a, b \in D_{\tan}$ et d'après la question 3)a) on a $\tan(a) \times \tan(b) \neq -1$. Ainsi,

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

$$= \frac{\tan(\arctan(x)) - \tan(\arctan(x/3))}{1 + \tan(\arctan(x))\tan(\arctan(x/3))}$$

$$= \frac{x - x/3}{1 + x \times x/3}$$

$$= \frac{2x/3}{1 + x^2/3}$$

$$= \frac{2x}{3 + x^2}$$

4. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ <u>fixé</u>. On pose $\theta = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.

(a) Exprimer $\cos(\theta)$ en fonction de x. On a $\cos(\theta) = \cos(\arccos(x/2)) = x/2$

Car $x/2 \in [-1,1]$ [0,25point]

(b) Exprimer $\sin^2(\theta)$ en fonction de $\cos^2(\theta)$. On a $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$ [0,25pt]

(c) Justifier que $\sin(\theta)$ est de signe constant. On a $\theta = \arccos\left(\frac{x}{2}\right) \in [0,\pi]$

Par définition. Or si $\theta \in [0,\pi]$ alors $\sin(\theta) \geqslant 0$

ainsi, $\sin(\theta)$ est de signe constant [0,5point]

(d) En déduire que $\sin(\theta) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. **[0,5point]** On a $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$

d'où $|\sin(\theta)| = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

comme $\sin(\theta) \geqslant 0$ d'après 4)c) on en déduit que

$\sin(\theta) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$

(e) Montrer que $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. **[0,5point]** On a $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

$= \frac{\sqrt{1-x^2/4}}{x/2} = \frac{2\sqrt{1-x^2/4}}{x} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

(f) Déduire des questions 3. et 4. que si x vérifie l'équation

$$\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right), \quad (\star)$$

alors x vérifie aussi l'équation $\frac{2x}{x^2+3} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. $(\star\star)$.

[1point]. Si x vérifie $(*)$ alors en appliquant la tangente on obtient

$\tan\left[\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right] = \tan\left(\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow \frac{2x}{x^2+3} = \tan\left(\arccos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ d'après 3) b)

$\Rightarrow \frac{2x}{x^2+3} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ d'après 4) e)

On a bien l'implication demandée :

« Si x solution de $(*)$ alors x solution de $(**)$ »

5. (a) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+3}$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ sont de même signe sur $E \setminus \{0\}$. **[0,5point]**

Soit $x \in E\setminus\{0\}$. On a $x^2+3>0$ et $\sqrt{4-x^2} \geq 0$

1er Cas : si $x<0$ alors $f(x)<0$ et $g(x) \leq 0$

2ème Cas : si $x>0$ alors $f(x)>0$ et $g(x) \geq 0$.

Dans tous les cas, f et g sont de même signe sur $E\setminus\{0\}$

(b) On considère le polynôme $P : x \mapsto x^6 + 6x^4 - 15x^2 - 36$, défini de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow P(x) = 0$. **[0,5point]** Soit $x \in E\setminus\{0\}$. On a

$$f(x) = g(x) \iff \frac{2x}{x^2+3} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

$$\iff \frac{(2x)^2}{(x^2+3)^2} = \left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\right)^2$$

$$\iff \frac{4x^2}{(x^2+3)^2} = \frac{4-x^2}{x^2}$$ car $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe

$$\iff 4x^4 = (4-x^2)(x^4+6x^2+9)$$

$$\iff 4x^4 = 4x^4 + 24x^2 + 36 - x^6 - 6x^4 - 9x^2$$

$$\iff x^6 + 6x^4 - 15x^2 - 36 = 0$$

$$\iff P(x) = 0$$

(c) Combien de racines réelles admet au plus le polynôme P? **[0,25point]**.

P est de degré 6 il admet au plus alors 6 racines réelles.

(d) Déterminer deux réels a, b tels que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $P(x) = (ax^2 + b)(x^4 + 9x^2 + 12)$.

[0,5point] Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$(ax^2+b)(x^4+9x^2+12)$

$= ax^6 + (9a+b)x^4 + (12a+9b)x^2 + 12b$

et $P(x) = x^6 + 6x^4 - 15x^2 - 36$

Cherchons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\begin{cases} a = 1 \\ 9a+b = 6 \\ 12a+9b = -15 \\ 12b = -36 \end{cases}$

Par identification, $\underline{a=1}$ et $\underline{b=-3}$ vérifient bien le système. Ainsi,

$\forall x \in \mathbb{R}, \ P(x) = (x^2-3)(x^4+9x^2+12)$

(e) Étudier le signe du polynôme $Q : x \mapsto x^4 + 9x^2 + 12$ sur $\mathbb{R}$. **[0,25point]**

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x^4 \geqslant 0$ et $x^2 \geqslant 0 \Rightarrow Q(x) \geqslant 12$

Ainsi, $Q > 0$ sur $\mathbb{R}$

(f) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation ($\star\star$) définie à la question 4.(f). **[0,5point]**

Soit $x \in E\setminus\{0\}$. On a $(\ast\ast) \Leftrightarrow P(x) = 0$ d'après 5)(e).

Or $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2-3)\,Q(x) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0$ car $Q(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

On a $\sqrt{3} \leqslant 2 \Leftrightarrow 3 \leqslant 4$. Donc $\sqrt{3} \in E$ (car $\sqrt{3} \geqslant 0$...) De même, $-\sqrt{3} \in E$

Les solutions de $(\ast\ast)$ sont donc $S_{\ast\ast} = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

6. (a) Compléter <u>successivement</u> les tableaux suivants **[2points]** :

θ	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\tan(\theta)$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cos(\theta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25

x	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	
$\arctan(x)$	$\pi/3$	$-\pi/3$	0,25
$\arctan(\frac{x}{3})$	$\pi/6$	$-\pi/6$	0,25
$\arccos(\frac{x}{2})$	$\pi/6$	$5\pi/6$	0,25

(b) Les réels $x_1 = \sqrt{3}$ et $x_2 = -\sqrt{3}$ sont-ils solutions de l'équation $(\star)$ ci-dessous :

$$\arctan(x) - \arctan\left(\frac{x}{3}\right) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right). \qquad (\star)$$

[0,5point]

• $\sqrt{3}$ est-elle solution de $(*)$?

On a $\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

et $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. Ainsi, $\sqrt{3}$ est solution de $(*)$

• $-\sqrt{3}$ est-elle solution de $(*)$?

On a $\arctan(-\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{3}$

$\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) = -\pi/6$

$\arccos(-\sqrt{3}/2) = 5\pi/6$

Or $-\frac{\pi}{3} - (-\pi/6) = -\pi/6 \neq \frac{5\pi}{6}$ Donc $-\sqrt{3}$ n'est pas solution de $(*)$.

(c) Conclure en donnant toutes les solutions de l'équation $(\star)$. On a montré que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, x solution de $(*) \Rightarrow x$ solution de $(**)$

$\Rightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

Réciproquement, $x = \sqrt{3} \Rightarrow x$ solution de $(*)$

Conclusion : $(*)$ admet pour unique solution $x = \sqrt{3}$. [0,25pt]