Université d'Aix-Marseille **Année 2017-2018**
L1-PEIP **U.E. Introduction à l'Analyse**

Corrigé Examen du
Mardi 16 janvier 2018

Exercice A On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \arctan(x) + 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. La fonction g étant continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. En posant $\forall x \in \mathbb{R}$ $u(x) = \arctan(x)$ et $v'(x) = 1$, les fonctions u, u', v, v' sont continues sur $\mathbb{R}$ et par intégration par parties on obtient

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(|1+x^2|\right) + C, C \in \mathbb{R}.$$

Une primitive G de la fonction g est définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$G(x) = x\arctan(x) + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + x - \frac{x^2}{2}.$$

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{1-1-x^2}{1+x^2} = \frac{-x^2}{1+x^2} \leqslant 0.$$

On obtient le tableau de variations suivant

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

3. L'application g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (car sa dérivée s'annule en un seul point sans changer de signe) et par lecture de son tableau de variations, elle est de plus à valeurs dans son image. Par théorème elle donc bijective et admet une application réciproque $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4. On a $g(0) = \arctan(0) + 1 = 1$ et $g(1) = \arctan(1) + 1 - 1 = \frac{\pi}{4}$. De plus, $h(1)$ est par définition l'unique réel x tel que $g(x) = 1$. Comme $g(0) = 1$ on en déduit que $h(1) = 0$. De la même façon, $h(\frac{\pi}{4})$ est l'unique réel x tel que $g(x) = \frac{\pi}{4}$. Comme $g(1) = \frac{\pi}{4}$, on en déduit que $h(\frac{\pi}{4}) = 1$.

5. Par définition, h est dérivable en un point $y_0 \in \mathbb{R}$ lorsque $g'(h(y_0)) \neq 0$. Or

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow x = 0,$$

et

$$h(y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = 1 \text{ d'après la question précédente}.$$

De fait, h est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

6. Pour tout x dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{1}{-\frac{h^2(x)}{1+h^2(x)}} = -\frac{1+h^2(x)}{h^2(x)}$$

et

$$1 + h'(x) + \frac{1}{h^2(x)} = 1 - \frac{1+h^2(x)}{h^2(x)} + \frac{1}{h^2(x)} = \frac{h^2(x) - 1 - h^2(x) + 1}{h^2(x)} = 0.$$

Exercice B : On considère sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{y(x)}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{(1-x)(x-\sqrt{x^2-1})}{x^2+2x+4} = 0. \quad (\star)$$

et son équation homogène associée :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \quad (\star\star).$$

1. (a) L'application $ch : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est strictement croissante et à valeurs dans son image, elle est par théorème bijective et admet pour réciproque l'application $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$. Pour tout x dans $[0, +\infty[$ et pour tout y dans $[1, +\infty[$ on a

$$\begin{aligned} y = \operatorname{ch}(x) &\Leftrightarrow y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &\Leftrightarrow 2y = e^x + e^{-x} \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + e^{-x}e^x = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0 \quad (\star\star\star) \end{aligned}$$

En posant $X = e^x$ l'équation $(\star\star\star)$ s'écrit $X^2 - 2yX + 1 = 0$. Le discriminant associé à cette équation est $\Delta = 4y^2 - 4 = 4(y^2-1) \geqslant 0$ car $y \in [1, +\infty[$. Cela nous donne deux racines réelles

$$X_1 = \frac{2y - \sqrt{4(y^2-1)}}{2} = y - \sqrt{y^2-1} \text{ et } X_2 = y + \sqrt{y^2-1}.$$

Comme $y \geqslant 1$ et $\sqrt{y^2-1} \geqslant 0$, on a $X_2 = y + \sqrt{y^2-1} \geqslant 1$ et donc en posant

$$x_2 = \ln(X_2) = \ln(y + \sqrt{y^2-1}),$$

on a $x_2 \in [0, +\infty[$ et x_2 est donc solution de l'équation $(\star\star\star)$. On sait que $\operatorname{ch} : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est bijective, l'équation $(\star\star\star)$ admet donc une unique solution dans $[0, +\infty[$. Finalement, pour tout y dans $[1, +\infty[$, $\operatorname{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(e^x + e^{-x} - (e^x - e^{-x})\right) \times \left(e^x + e^{-x} + (e^x - e^{-x})\right) \\ &= \frac{1}{4} \times 2e^{-x} \times 2e^x \\ &= 1. \end{aligned}$$

(c) En posant le changement de variables $x = \operatorname{ch}(t)$ qui est admissible car la fonction

$$\operatorname{ch} :]0, +\infty[\to]1, +\infty[$$

est une bijection dérivable avec ch' continue sur $]0,+\infty[$, on obtient :

$$\begin{aligned}
-\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx &= -\int \frac{\mathrm{sh}(t)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)-1}}dt \\
&= -\int \frac{\mathrm{sh}(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(t)}}dt \quad \textbf{car } \mathrm{ch}^2(t)+\mathrm{sh}^2(t)=1,\ \forall t\in]0,+\infty[\\
&= -\int 1dt \quad \textbf{car } |\mathrm{sh}(t)|=\mathrm{sh}(t), \forall t\in]0,+\infty[\\
&= -t+B \\
&= -\operatorname{argch}(x)+B, B \\
&= -\ln(x+\sqrt{x^2-1})+B \\
&= \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)+B,
\end{aligned}$$

avec $B\in\mathbb{R}$ une constante. Pour $B=0$ on obtient une primitive de la fonction a définie sur $]1,+\infty[$ par $A : x\mapsto \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$.

(d) Pour tout x dans $\mathbb{R}$, $x-1=\frac{1}{2}(2x+2)-1-1=\frac{1}{2}(2x+2)-2$ et

$$r(x)=\frac{x-1}{x^2+2x+4}=\frac{1}{2}\times\frac{2x+2}{x^2+2x+4}-2\times\frac{1}{x^2+2x+4}.$$

De plus, pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$x^2+2x+4=(x+1)^2-1+4=(x+1)^2+3=3\left(\frac{(x+1)^2}{3}+1\right)=3\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right),$$

et

$$-2\times\frac{1}{x^2+2x+4}=-2\times\frac{1}{3\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)}=-2\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\int r(x)dx &= \int \frac{1}{2}\times\frac{2x+1}{x^2+2x+4}-2\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln(|x^2+2x+4|)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4)-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda \\
&= \ln(\sqrt{x^2+2x+4})-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+\lambda,
\end{aligned}$$

avec $\lambda\in\mathbb{R}$ une constante. Pour $\lambda=0$ on obtient comme primitive pour la fraction rationnelle r la fonction R définie sur $\mathbb{R}$ par

$$R : x\mapsto \ln(\sqrt{x^2+2x+4})-\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. Les solutions de l'équation homogène $(\star\star)$ sont définies sur $]1,+\infty[$ par

$$f_h(x)=Ce^{A(x)}=Cexp\left(\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\right)=\frac{C}{x+\sqrt{x^2-1}}, C\in\mathbb{R}.$$

3. Cherchons une solution particulière de l'équation $(\star)$ sur $]1,+\infty[$ sous la forme

$$f_p(x) = \frac{\varphi(x)}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

où $\varphi :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à déterminer. Pour tout x dans $]1,+\infty[$ on a

$$\begin{aligned} f_p'(x) &= \frac{\varphi'(x)(x+\sqrt{x^2-1}) - \varphi(x)\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2} \\ &= \frac{\varphi'(x)}{x+\sqrt{x^2-1}} - \varphi(x)\times\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{\varphi'(x)}{x+\sqrt{x^2-1}} - \frac{\varphi(x)}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & f_p'(x) + \frac{f_p(x)}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{(1-x)(x-\sqrt{x^2-1})}{x^2+x+1} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\varphi'(x)}{x+\sqrt{x^2-1}} - \frac{\varphi(x)}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}} + \frac{\varphi(x)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{(x-1)(x-\sqrt{x^2-1})}{x^2+2x+4} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{\varphi'(x)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x-1)(x-\sqrt{x^2-1})}{x^2+2x+4} \\ \Leftrightarrow\quad & \varphi'(x) = \frac{(x-1)(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2-1})}{x^2+2x+4} \\ \Leftrightarrow\quad & \varphi'(x) = \frac{(x-1)(x^2-(x^2-1))}{x^2+2x+4} \\ \Leftrightarrow\quad & \varphi'(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+4} \\ \Leftrightarrow\quad & \varphi'(x) = r(x). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la question $1)d)$, $\varphi = R$ convient et on obtient $\forall x \in]1,+\infty[$,

$$f_p(x) = \frac{\ln(\sqrt{x^2+2x+4}) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

4. Les solutions de $(\star)$ sont définies sur $]1,+\infty[$ par

$$f(x) = f_h(x) + f_p(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(C + \ln(\sqrt{x^2+2x+4}) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right), C \in \mathbb{R}.$$

Exercice C On considère l'équation différentielle

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = xe^x + e^{3x}. \tag{1}$$

1. On note $P_c : x \mapsto x^2 - 6x + 9$ le polynôme caractéristique associé à l'équation (1). On calcule son discriminant $\Delta = 36 - 4\times 9 = 0$, P_c admet donc une racine double réelle $x_0 = 3$. Les solutions de l'équation homogène associées à (1) sont alors définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_h(x) = (Ax+B)e^{3x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

2. Comme le second membre de l'équation (2) est de la forme $Q_1(x)e^x$ où $Q_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme de degré 1, on cherche aussi une solution particulière de l'équation (2) sous la forme $y_1(x) = P_1(x)e^x$ où $P_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme du même degré que Q_1 (car 1 n'est pas racine de P_c). Cherchons $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que $y_1 : x \mapsto (ax+b)e^x$ soit solution de (2) : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} y_1''(x) - 6y_1'(x) + 9y_1(x) = xe^x &\Leftrightarrow (2a + ax + b)e^x - 6(a + ax + b)e^x + 9(ax+b)e^x = xe^x \\ &\Leftrightarrow 2a + ax + b - 6(a + ax + b) + 9(ax+b) = x \\ &\Leftrightarrow x(a - 6a + 9a) + 2a + b - 6a - 6b + 9b = x \\ &\Leftrightarrow 4ax + 4b - 4a = x \\ &\Leftrightarrow 4a = 1 \text{ et } 4b - 4a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{4} \text{ et } b = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

On obtient $\forall x \in \mathbb{R}, y_1(x) = \dfrac{1}{4}(x+1)e^x$.

3. Comme le second membre de l'équation (3) est de la forme $Q_2(x)e^{3x}$ où $Q_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme de degré 0, on cherche aussi une solution particulière de l'équation (2) sous la forme $y_2(x) = P_2(x)e^{3x}$ où $P_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un polynôme de degré $0+2$ (car 3 est racine double de P_c). Cherchons $c \in \mathbb{R}$ de sorte que $y_2 : x \mapsto cx^2e^{3x}$ soit solution de (3) : pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x) = e^{3x} &\Leftrightarrow (3(2cx + 3cx^2) + 2c + 6cx)e^{3x} - 6(2cx + 3cx^2)e^{3x} + 9cx^2e^{3x} = e^{3x} \\ &\Leftrightarrow (3(2cx + 3cx^2) + 2c + 6cx) - 6(2cx + 3cx^2) + 9cx^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow 6cx + 9cx^2 + 2c + 6cx - 12cx - 18cx^2 + 9cx^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2(9c - 18c + 9c) + x(6c + 6c - 12c) + 2c = 1 \\ &\Leftrightarrow c = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On obtient $\forall x \in \mathbb{R}, y_2(x) = \dfrac{1}{2}x^2e^{3x}$.

4. Comme y_1 et y_2 sont respectivement solutions de (2) et (3), elles vérifient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y_1''(x) - 6y_1'(x) + 9y_1(x) = xe^x \text{ et } y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x) = e^{3x}.$$

En sommant ces deux inégalités on obtient

$$y_1''(x) - 6y_1'(x) + 9y_1(x) + y_2''(x) - 6y_2'(x) + 9y_2(x) = xe^x + e^{3x},$$

qui s'écrit aussi

$$(y_1 + y_2)''(x) - 6(y_1 + y_2)'(x) + 9(y_1 + y_2)(x) = xe^x + e^{3x},$$

ce qui prouve bien que $y_1 + y_2$ est solution particulière de (1).

5. Les solutions de l'équation différentielle (1) sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = f_h(x) + y_1(x) + y_2(x) = (Ax + B)e^{3x} + \frac{1}{4}(x+1)e^x + \frac{1}{2}x^2e^{3x}.$$

6. Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $f'(x) = (A + 3Ax + 3B)e^{3x} + \frac{1}{4}(1 + x + 1)e^x + \frac{1}{2}(2x + 3x^2)e^{3x}$. De plus,

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 0 \Leftrightarrow B + \frac{1}{4} = 0 \text{ et } A + 3B + \frac{2}{4} = 0 \Leftrightarrow A = \frac{1}{4} \text{ et } B = -\frac{1}{4}.$$

Il existe donc une unique solution de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ et elle est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}(2x^2 + x - 1)e^{3x} + \frac{1}{4}(x+1)e^x.$$

Exercice D

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a

$$x \in [a,b] \Rightarrow a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow -b \leqslant -x \leqslant -a \Rightarrow a+b-b \leqslant a+b-x \leqslant a+b-a \Rightarrow a+b-x \in [a,b].$$

2. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $I\!R$ et telle que pour tout x de $[a,b]$, on ait :

$$f(a+b-x) = f(x). \qquad (\star)$$

En posant le changement de variable $u = a+b-x$ (admissible car $u \mapsto a+b-u$ est bijective de $[a,b]$ dans $[a,b]$ avec sa dérivée $u \mapsto -1$ continue sur $[a,b]$), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_a^b xf(x)dx &= -\int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)du \\
&= \int_a^b (a+b-u)f(u)du \text{ car d'après } (\star)\ \forall u \in [a,b], f(a+b-u) = f(u) \\
&= \int_a^b (a+b)f(u)du - \int_a^b uf(u)du \\
&= \int_a^b (a+b)f(x)dx - \int_a^b xf(x)dx \text{ car la variable d'intégration est muette.}
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$2\int_a^b xf(x)dx = (a+b)\int_a^b f(x)dx$$

et donc

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx.$$

3. On suppose à présent que $a = 0, b = \pi$ et $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}.$$

(a) Pour tout x dans $[0,\pi]$, on a

$$f(0+\pi-x) = \frac{\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)} = \frac{\sin(\pi)\cos(x)-\sin(x)\cos(\pi)}{1+(\cos(\pi)\cos(x)+\sin(\pi)\sin(x))^2} = \frac{\sin(x)}{1+(-\cos(x))^2} = f(x).$$

Comme f vérifie $(\star)$ pour $a = 0$ et $b = \pi$ elle vérifie alors également $(\star\star)$ pour les mêmes valeurs de a et b ce qui donne

$$\int_0^\pi xf(x)dx = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{0+\pi}{2}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

(b)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2}du = \Big[\arctan(u)\Big]_{-1}^1 = \arctan(1) - \arctan(-1) = 2\arctan(1) = 2\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) En utilisant le changement de variable $u = \cos(x)$ (admissible car $x \mapsto \cos(x)$ est bijective de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$ avec sa dérivée $x \mapsto -\sin(x)$ continue sur $[0,\pi]$), on obtient grâce à la question $3)\ b)$

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_1^{-1}\frac{du}{1+u^2} = \int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2}du = \frac{\pi}{2},$$

et donc d'après la question $3)\ a)$

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$