L1 MCPI **Analyse et probabilités** 2019-2020

DEVOIR MAISON - CORRIGÉ

Exercice 1. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \cos(x)\sin(2x), \forall x \in \mathbb{R}$. h est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un DL en 0 à l'ordre 4 donné par la formule de Taylor-Young pour tout x dans un voisinage de 0 :

$$h(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right) \times \left(2x - \frac{8x^3}{6}\right) + o(x^4) = 2x - \frac{7}{3}x^3 + o(x^4).$$

La droite d'équation $y = 2x$ est tangente à $\mathscr{C}_h$ en 0 et comme $-\frac{7}{3}x^3$ change de signe en 0, on en déduit que y traverse $\mathscr{C}_h$ en 0.

Exercice 2. f et g sont de classes $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ elles admettent donc un DL en 1 à l'ordre 1 donné par la formule de Taylor-Young : pour tout x dans un voisinage ϑ de 1,

$$f(x) = 0 + \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\epsilon(x) \text{ et } g(x) = 1(x-1) + (x-1)\bar{\epsilon}(x)$$

avec $\epsilon, \bar{\epsilon} : \vartheta \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim_{x\to 1} \epsilon(x) = \lim_{x \to 1} \bar{\epsilon}(x) = 0$. On obtient

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{0 + \frac{1}{2}(x-1) + (x-1)\epsilon(x)}{1(x-1) + (x-1)\bar{\epsilon}(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2} + \epsilon(x)}{1 + \bar{\epsilon}(x)} = \frac{1}{2}.$$

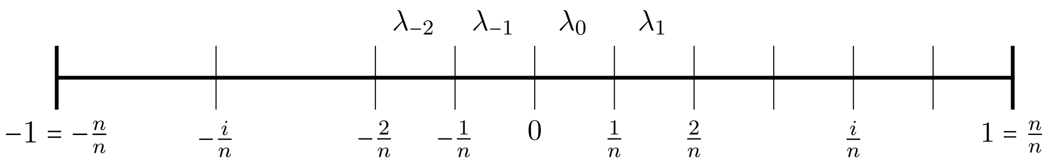
Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Comme f est bornée, il existe alors $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, m \leqslant f(x) \leqslant M$. On introduit la fonction $h : [m, M] \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = g(x), \forall x \in [m, M]$. On a alors l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $(h \circ f)(x) = (g \circ f)(x)$. Comme h est continue sur le segment $[m, M]$, on en déduit par le Théorème de Heine que h est uniformément continue sur $[m, M]$. La composition de deux fonctions uniformément continue étant aussi uniformément continue (Voir Planche 3, Exercice 3), on conclut que $h \circ f = g \circ f$ est aussi uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathscr{E}([-1, 1])$ et la subdivision régulière de $[-1, 1]$ suivante

$$\sigma = \Big(-1, -\frac{n-1}{n}, \ldots, -\frac{i}{n}, \ldots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\Big).$$

On suppose que la fonction φ est paire. Comme $\varphi \in \mathscr{E}([-1, 1])$, il existe $\lambda_{-n}, \lambda_{-(n-1)}, \ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}$ tels que

$$\varphi(x) = \lambda_i \text{ si } x \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right[, \ i \in \Big\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1\Big\}$$



Comme φ est paire alors $\forall x \in [-1,1]$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$ et donc $\lambda_0 = \lambda_{-1}$, $\lambda_1 = \lambda_{-2}, \ldots$, et plus généralement, $\forall i \in \{-n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1\}$, $\lambda_i = \lambda_{-(i+1)}$. Ainsi,

$$\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx = \sum_{i=-n}^{n-1} \lambda_i \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{n-1} \lambda_i = \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \lambda_i + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = \frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \lambda_{-(i+1)} + \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

Or

$$\frac{1}{n} \sum_{i=-n}^{-1} \lambda_{-(i+1)} = \frac{1}{n} \sum_{j=n-1}^{0} \lambda_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i = \int_0^1 \varphi(x)dx,$$

et on a le résultat demandé.

Exercice 5. On définit une fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \in]0,1]$ et $h(0) = 0$.

1. h est continue sur $]0,1]$ car composée de fonctions continues sur cet intervalle. Étudions la continuité en 0 : on a $h(0) = 0$ mais h n'admet pas de limite en $0+$. Si c'était le cas, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par $u_n = \sin(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ admettrait aussi une limite, ce qui n'est pas le cas (Voir Planche 1 Exercice 3). Ainsi, h n'est pas continue en 0, donc elle n'est pas continue sur $[0,1]$.
2. On a $0 < \frac{2}{\pi} < \frac{3}{\pi}$ et $h(0) < h(\frac{3}{\pi}) < h(\frac{2}{\pi})$, ainsi h n'est ni croissante ni décroissante, elle n'est donc pas monotone.
3. Soit $0 < \epsilon < 1$ fixé.
   (a) Comme h est continue sur le segment $[\epsilon, 1]$, elle est donc intégrable sur $[\epsilon, 1]$ et par définition, il existe alors $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([\epsilon, 1])$ telles que
   $$\forall x \in [\epsilon, 1], \varphi(x) \leqslant h(x) \leqslant \psi(x) \text{ et } \int_\epsilon^1 (\psi - \varphi)(x)dx \leqslant \epsilon.$$
   (b) On remarque que $\forall x \in [0,1]$, $-1 \leqslant h(x) \leqslant 1$. Ainsi, on construit les fonctions $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathscr{E}([0,1])$ de la façon suivante
   $$\begin{array}{ccccc} \tilde{\varphi}(x) = -1 & \text{et} & \tilde{\psi}(x) = 1 & \text{si} & x \in [0, \epsilon[\\ \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) & \text{et} & \tilde{\psi}(x) = \psi(x) & \text{si} & x \in [\epsilon, 1]. \end{array}$$
   elles sont bien égales respectivement à φ et ψ sur $[\epsilon, 1]$ et vérifient
   $$\forall x \in [0,1], \tilde{\varphi}(x) \leqslant h(x) \leqslant \tilde{\psi}(x) \text{ et } \int_0^1 (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)dx \leqslant 3\epsilon$$
   car $\int_0^1 (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)dx = \int_0^\epsilon (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)dx + \int_\epsilon^1 (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)dx = \int_0^\epsilon 2dx + \int_0^1 (\psi - \varphi)(x)dx \leqslant 3\epsilon.$
   (c) Le choix du $\epsilon > 0$ étant arbitraire, on en déduit que $h \in \mathscr{R}([0,1])$ par définition.

Exercice 6.

1. $\int_a^b (f(x))^2 dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$ n'est pas vraie car $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = \left(\int_0^1 x dx\right)^2$.
2. $\int_a^b |f(x)| dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$ n'est pas vraie car $\int_{-1}^1 |x| dx = 1 \neq 0 = \left|\int_{-1}^1 x dx\right|$.
3. $\int_a^b \sqrt{f(x)} dx = \sqrt{\int_a^b f(x)dx}$ n'est pas vraie car $\int_0^1 \sqrt{x^2} dx = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx}$.