DS1 Partie II

Exercice 5

1) On a $\mathbb{R}_+ \subset \mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ Donc $g\circ f$ existe et est définie par

$g\circ f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ où $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(f(x)) = \dfrac{2(\sqrt{x})^2}{1+(\sqrt{x})^4} = \dfrac{2x}{1+x^2}$

$x \longmapsto g(f(x))$

2) Comme $\mathbb{R} \not\subset \mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+$ alors $f\circ g$ n'existe pas

3) a) Soit $x \in \mathcal{D}_h = \mathbb{R}_+$ On a pour $x \neq 0$

$$h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2/x}{1+1/x^2} = \frac{2}{x} \times \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2x}{1+x^2} = h(x)$$

b) On a d'après 3) a) $h(1/2) = h(2)$ et $1/2 \neq 2$ donc h non injective

Exercice 6

1) On a $\varphi(0,1) = 1$ et $\varphi(1,0) = 1$ Or $(0,1) \neq (1,0)$ Donc φ non injective

2) $0 \in \mathbb{N}$ n'admet pas d'antécédent par φ car $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$, $\varphi(n,m) \geqslant 1$
Ainsi, φ non surjective.

3) φ n'est pas bijective, elle n'admet donc pas de réciproque.

Exercice 7

1) Soient $h : E \to F$ et $B, B' \subset F$. Fixons $x \in E$. On a

$x \in h^{-1}(B \cap B') \iff h(x) \in B \cap B'$

$\iff h(x) \in B$ et $h(x) \in B'$

$\iff x \in h^{-1}(B)$ et $x \in h^{-1}(B')$

$\iff x \in h^{-1}(B) \cap h^{-1}(B')$

Conclusion : $h^{-1}(B \cap B') = h^{-1}(B) \cap h^{-1}(B')$

2) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications injectives.
On définit $g \circ f : E \to G$. Soient $x, x' \in E$ fixés. On a

$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \Rightarrow g(f(x)) = g(f(x'))$

$\Rightarrow f(x) = f(x')$ car g injective

$\Rightarrow x = x'$ car f injective

Conclusion : $g \circ f$ est bien injective

3) Soient E, F, G trois ensembles tels que $E \cup F = F \cap G$.
Fixons $x \in E$. Comme $E \subset E \cup F$ alors $x \in E \cup F$
Comme $E \cup F = F \cap G$ alors $x \in F \cap G$
Comme $F \cap G \subset F$ alors $x \in F$
On a donc montré que $E \subset F$. (*)
Fixons $y \in F$. Comme $F \subset E \cup F$ alors $y \in E \cup F$
Comme $E \cup F = F \cap G$ alors $y \in F \cap G$
Comme $F \cap G \subset G$ alors $y \in G$
On a donc montré que $F \subset G$. (**)
D'après (*) et (**) on peut déduire que $E \subset F \subset G$

Conclusion : $E \cup F = F \cap G \Rightarrow E \subset F \subset G$

Exercice 8 $h :]0,1] \to]0,1]$ et $k :]0,1] \to]0,1]$

$x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ $\qquad x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

1) Soit $x \in]0,1]$. On a

$k(h(x)) = \frac{1-\sqrt{1-h^2(x)}}{h(x)}$ Or $h^2(x) = \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$ et comme $1+x^2>0$ et $1-x^2 \geqslant 0$

On a

Donc $\sqrt{1-h^2(x)} = \left(1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{(1+x^2)^2-4x^2}{(1+x^2)^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}\right)^{1/2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

Ainsi, $1-\sqrt{1-h^2(x)} = 1-\frac{1-x^2}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1+x^2}{1+x^2} = \frac{2x^2}{1+x^2}$

et $(k\circ h)(x) = k(h(x)) = \frac{1+x^2}{2x} \times \frac{2x^2}{1+x^2} = x$

Conclusion : $\forall x \in]0,1]$, $k(h(x)) = x$

2) Soit $x \in]0,1]$. On a

$(h\circ k)(x) = \frac{2k(x)}{1+k^2(x)}$ Or $k^2(x) = \frac{(1-\sqrt{1-x^2})^2}{x^2} = \frac{1-2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{x^2}$

et $1+k^2(x) = \frac{x^2+2(1-\sqrt{1-x^2})-x^2}{x^2} = \frac{2}{x}k(x)$

D'où $(k\circ k)(x) = \frac{2k(x)}{\frac{2}{x}k(x)} = \frac{2x}{2} = x$

Conclusion : $\forall x \in]0,1]$, $(h\circ k)(x) = x$

3) D'après 1) et 2) on a $k\circ h = h\circ k = Id_{]0,1]}$ où $Id_{]0,1]}$ est l'application identité de $]0,1]$.
On en déduit que k et h sont bijectives et réciproques l'une de l'autre sur $]0,1]$