Université Aix-Marseille
Faculté des sciences
Licence de mathématiques et licence d'informatique
Semestre 1

UE Introduction à l'analyse
Partiel 1
Durée 2 heures

Exercice 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On considère l'énoncé (A) :*

$$(\exists M \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ [(f(x) \geqslant M) \Longrightarrow (x < 0)].$$

1. *Donner la négation de (A).*
2. *Démontrer que (A) est fausse lorsque f est définie pour tout x réel par $f(x) = |x|$.*
3. *Démontrer que (A) est vraie lorsque f est définie pour tout x réel par $f(x) = 1 - x$.*

Exercice 2. *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul*

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Exercice 3. *Soient A et B deux ensembles et soit $f : A \to B$ une application.*

1. *Ecrire exclusivement en symboles mathématiques ce que veut dire f est surjective.*
2. *Ecrire exclusivement en symboles mathématiques ce que veut dire f est injective.*

Exercice 4. *Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \textit{si } n \textit{ est un entier pair ;} \\ n+1 & \textit{si } n \textit{ est un entier impair.} \end{cases}$$

1. *Est-ce que f est injective ?*
2. *Est-ce que f est surjective ?*
3. *Montrer que l'image réciproque de l'ensemble des nombres impairs est égale à l'ensemble*
$$\{n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 5. *Soient les ensembles*

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x - 2| \leqslant x\} \quad \textit{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x^2 - 2x| > \frac{24}{25}\}$$

Exprimer les ensembles A,B,$A \cup B$ et $A \cap B$ comme réunion d'intervalles.