

Examen DS1
vendredi 14 octobre 2016

durée : 1h30

*Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.*

On rendra deux copies séparées : COPIE 1 (exo 1 + 2) COPIE 2 (exo 3 +4)

Exercice 1 QUESTIONS DE COURS

Soient A , B et C trois sous-ensembles de \mathbb{R} , $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux applications.

- Traduire l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
 - L'application f est injective.
 - L'application f n'est pas surjective.
- Rappeler les espaces de départ et d'arrivé des applications arcsinus, arccosinus et arctangente.
- Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f : A \rightarrow C$ est injective.
- Déterminer le domaine de définition des fonctions définies par $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ et $g(x) = \frac{1}{\tan(\sin x)}$.

Exercice 2 Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations et équations suivantes :

- $|3x + 6| + |x - 2| \leq 8$.
- $\sqrt{4x + 3} = x - 2$.
- $\cos(4x - \frac{5\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$.

Exercice 3 On considère l'application $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = 2x^2 - x$.

- Déterminer $h^{-1}(\{0\})$.
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) > -3$.
- En déduire que h n'est ni injective, ni surjective.
- Si c'est possible, déterminer l'application réciproque de h .

Exercice 4 On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$.

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer que pour tout x non nul, $f(\frac{1}{x}) = f(x)$.
- Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$.
- Montrer que pour réel x , on a $-1 \leq f(x) \leq 1$.
- L'application f est-elle injective ? L'application f est-elle surjective ?
- Montrer que l'application g définie, de $[-1, 1]$ à valeurs dans $[-1, 1]$, par $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ est bijective et déterminer son application réciproque.