Université d'Aix-Marseille **Année 2017-2018**
L1-PEIP **U.E. Introduction à l'Analyse**

Examen DS1

vendredi 13 octobre 2017

durée : 2h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

On rendra deux copies séparées : COPIE 1 (exo 1 + 2) COPIE 2 (exo 3 +4)

Exercice 1 Soient E, F et G trois sous-ensembles de $\mathbb{R}$, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) L'application f est surjective.
   (b) L'application f n'est pas injective.
   (c) L'application f est strictement décroissante.
2. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Donner la définition de $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.
3. On s'intéresse dans cette question à la composition $g \circ f$.
   (a) Justifier que l'application $g \circ f$ existe et donner ses espaces de départ et d'arrivée.
   (b) Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
4. Étudier l'injectivité et la surjectivité de l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & x + 2y^2 + 3z^3. \end{array}$$

   Rappel : $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 2 Soient E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. On considère l'application $h : E \to F$ définie par $h(x) = (x+1)^2 - 2$, $\forall x \in E$.

1. Supposons dans cette question que $E = F = \mathbb{R}$. Dresser le tableau de variations de l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Est-elle injective ? Est-elle surjective ?
2. Supposons dans cette question que $E = \mathbb{R}$. Déterminer F pour que $h : \mathbb{R} \to F$ soit surjective.
3. Supposons dans cette question que $F = \mathbb{R}$. Déterminer E pour que $h : E \to \mathbb{R}$ soit injective.
4. Existe-t-il deux sous-ensembles E et F de $\mathbb{R}$ de sorte que $h : E \to F$ admette une réciproque ? Si oui, les déterminer et donner la définition de h^{-1}.

Exercice 3 On considère l'assertion P suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x > 1 \text{ ou } x \leqslant -1) \Rightarrow |x| > 1.$$

1. Donner la réciproque de P.
2. Donner la contraposée de P.
3. Donner la négation de P.
4. L'assertion P est-elle vraie ? (Justifier la réponse).

Exercice 4

1. Questions préliminaires (ces résultats pourront être utilisés dans le reste de l'exercice).
   (a) Rappeler la définition de l'application valeur absolue.
   (b) Étudier le signe sur $\mathbb{R}$ du polynôme P défini par $P(x) = x^2 - 4x + 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   (c) Vérifier que pour tout y dans $]0, \frac{1}{4}]$, $\dfrac{1 + \sqrt{1 - 16y^2}}{2y} \geqslant 2$.

2. On considère l'application $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2 + 4}, \forall x \in \mathcal{D}_f$.
   (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
   (b) Montrer que pour tout x dans $\mathcal{D}_f$, $f(-x) = f(x)$. Quelle propriété sur f vient-on de montrer ?
   (c) Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$.
   (d) Montrer que $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{4}$.
   (e) L'application f est-elle injective ? (Justifier la réponse).
   (f) L'application f est-elle surjective ? (Justifier la réponse).

3. On considère l'application $g : [2, +\infty[\to \mathcal{I}(g)$ définie par $g(x) = f(x), \forall x \in [2, +\infty[$, où $\mathcal{I}(g)$ désigne l'image de l'application g.
   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction g et déterminer l'image $\mathcal{I}(g)$ de g.
   (b) Justifier que g est bijective.
   (c) Justifier que g admet une réciproque et la déterminer.