

**Exercice 1.**

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^*, -1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$ . En utilisant le théorème des gendarmes, on en déduit

que  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ . Ainsi,  $\ell$  existe et  $\ell = 0$ .

2.  $f$  admet une limite finie en 0, elle est donc prolongeable par continuité en 0.

3. (a) Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*$ ,

$$g'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \text{ et } g''(x) = \left(6x - \frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4 \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*$ , en utilisant le même argument qu'en 1., on a

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ceci prouve que  $g$  est dérivable en 0 et que  $g'(0) = 0$ .

(c) En utilisant comme en 1. le théorème des gendarmes, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = g'(0).$$

Ainsi,  $g'$  est continue en 0.

(d) Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe  $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$  tel que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lambda$ . On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = \cos(n\pi)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . On a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lambda$ . Les sous-suites de rangs pairs et impairs définies pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  par

$$u_{2n} = \cos(2n\pi) = 1 \text{ et } u_{2n+1} = \cos((2n+1)\pi) = -1$$

tendent alors aussi vers  $\lambda$ . Par conséquent,  $-1 = 1$  ce qui est absurde donc la fonction  $h : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'admet pas de limite en  $0^+$ .

(e) Par l'absurde, supposons que  $\tilde{\tau} : x \mapsto 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  admette une limite notée  $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$  en 0. Alors  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \tilde{\tau}(x)) = 0 - \alpha = -\alpha$  ce qui est impossible car  $h$  n'admet pas de limite en  $0^+$ . Ainsi,  $\tilde{\tau}$  n'admet pas de limite en 0.

(f) On remarque que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*$ ,

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = \frac{3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \tilde{\tau}(x).$$

D'après ce qui précède,  $\tilde{\tau}$  n'admet pas de limite en 0, donc  $g'$  n'est pas dérivable en 0.

(g) Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}^*$ , on a  $g(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \times x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ . On pose  $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\epsilon(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$\epsilon$  vérifie bien  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = x^2 \epsilon(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ .

(h) D'après ce qui précède, il existe  $c_0 = c_1 = c_2 = 0$  et  $\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (vérifiant  $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$ ) tels que pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$

$$g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + x^2\epsilon(x).$$

On peut donc en déduire que  $g$  admet un développement limité en 0 à l'ordre 2.

### Exercice 2.

1.  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $\varphi$  et  $\varphi'$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $h$  aussi comme composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$h'(x) = -e^{-x}(\varphi(x) + \varphi'(x)) + e^{-x}(\varphi'(x) + \varphi''(x)) = e^{-x}(\varphi''(x) - \varphi(x)).$$

2. (a)  $h$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , elle est donc en particulier continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$ . De plus  $h(a) = e^{-a}(\varphi(a) + \varphi'(a)) = 0$ ,  $h(b) = e^{-b}(\varphi(b) + \varphi'(b)) = 0$ , ainsi  $h(a) = h(b)$  et  $h$  vérifie bien les trois hypothèses du théorème de Rolle.

(b) En appliquant le théorème de Rolle à  $h$  sur  $[a, b]$ , il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $h'(c) = 0$ . Or

$$h'(c) = 0 \Leftrightarrow e^{-c}(\varphi''(c) - \varphi(c)) = 0 \Leftrightarrow \varphi''(c) - \varphi(c) = 0 \Leftrightarrow \varphi''(c) = \varphi(c),$$

d'où le résultat.

### Exercice 3.

1. (a) Pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $g_1(x) = 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} + o(x^3)$ .

(b) Pour tout  $x$  dans  $I$ ,  $g_2(x) = -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o(x^3)$ .

(c) Pour tout  $x$  dans  $I$ ,

$$g(x) = \frac{2}{3} \left( 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + \frac{(-x)^3}{3!} \right) + \left( -x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} \right) + o(x^3) = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + o(x^3).$$

(d) Pour tout  $x$  dans  $I$ , on a  $f_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$ .

(e) Pour tout  $x$  dans  $I$ ,

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \sqrt{\cos(x)} \\ &= \sqrt{1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)} = \sqrt{1+u} \text{ en posant } u = -\frac{x^2}{2!} + o(x^3), \text{ si } x \rightarrow 0 \text{ alors } u \rightarrow 0 \\ &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left( -\frac{x^2}{2} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{-x^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{16} \left( \frac{-x^2}{2} \right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3). \end{aligned}$$

(f) En utilisant ce qui précède, pour tout  $x$  dans  $I$ , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{f_2(x)} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{1-v} \text{ en posant } v = \frac{x^2}{4} + o(x^3), \text{ lorsque } x \text{ tend vers } 0, v \text{ tend vers } 0 \\ &= 1 + v + v^2 + v^3 + o(v^3) \\ &= 1 + \left( \frac{x^2}{4} \right) + \left( \frac{x^2}{4} \right)^2 + \left( \frac{x^2}{4} \right)^3 + o(x^3) \\ &= 1 + \frac{x^2}{4} + o(x^3). \end{aligned}$$

2. On a pour tout  $x$  dans  $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) \times f(x) \\ &= \left( \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x^3 \right) \times \left( 1 + \frac{x^2}{4} \right) + o(x^3) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{12}x^2 - \frac{5}{12}x^3 + o(x^3) \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x - \frac{31}{36}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

3. La tangente à la courbe de la fonction  $h$  en 0 a pour équation l'équation  $y = \frac{2}{3} - \frac{5}{3}x$ . La position de la courbe par rapport à  $y$  est donnée par le signe de  $-\frac{31}{36}x^3$ . Comme  $-\frac{31}{36}x^3$  change de signe en 0, on en déduit que la tangente traverse la courbe en 0.

#### Exercice 4.

1. (a)  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$

(b) Fixons  $\epsilon > 0$  et montrons l'existence d'un tel  $\delta > 0$ . D'après  $(\star)$ , on sait que  $\forall x \in \mathbb{R},$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|^\beta = ke^{\beta \ln(|x-x_0|)}.$$

En supposant que  $|x - x_0| < \delta$  on obtient alors comme  $\beta > 0$  que  $|f(x) - f(x_0)| < ke^{\beta \ln(\delta)}$ . Il suffit alors de choisir  $\delta > 0$  tel que  $ke^{\beta \ln(\delta)} \leq \epsilon$  pour avoir  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ . Par exemple  $\delta > 0$  tel que  $ke^{\beta \ln(\delta)} = \epsilon$  ce qui donne  $\delta = e^{\frac{1}{\beta} \ln(\frac{\epsilon}{k})} > 0$  et on a le résultat.

(c) D'après  $(\star)$ , on sait que  $\forall x \in \mathbb{R},$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|^\beta.$$

De cette façon, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ , on en déduit que

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq k \frac{|x - x_0|^\beta}{|x - x_0|} = k|x - x_0|^{\beta-1} = ke^{(\beta-1)\ln(|x-x_0|)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \text{ car } \beta - 1 > 0.$$

(d) Pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}$  on a montré que le taux d'accroissement  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  admettait une limite finie égale à 0, ce qui implique que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 0$ .

2. (a) Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x < y$ .  $f$  étant continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , elle est en particulier continue sur  $[x, y]$  et dérivable sur  $]x, y[$ . Elle satisfait donc les hypothèses du théorème des accroissements finis.

(b) D'après le théorème des accroissements finis appliqué sur  $[x, y]$ , il existe  $c \in ]x, y[$  tel que  $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ . La fonction  $f'$  étant identiquement nulle, on en déduit que  $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) - f(y) = 0$  ce qui donne le résultat demandé.

3. (a)  $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$

(b) Supposons par l'absurde qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $f(x_0) \neq \ell$  et supposons sans perte que  $f(x_0) > \ell$ . En posant  $\epsilon = \frac{f(x_0) - \ell}{2} > 0$  dans l'assertion obtenue en 3.b., on obtient

$$\exists A > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \frac{f(x_0) - \ell}{2}$$

D'après la question 2., on sait que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x_0)$  ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow |f(x_0) - \ell| < \frac{f(x_0) - \ell}{2}$$

ce qui est absurde car  $|f(x_0) - \ell| = f(x_0) - \ell$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ell$ .