Mathématiques 2 : Analyse et Probabilités

2018-2019

Licence MPCI

DEVOIR SURVEILLÉ N°2

Mercredi 6 mars 2019

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x}), \forall x \in \mathbb{R}^*$.

1. Montrer que f admet une limite ℓ en 0 que l'on calculera.
2. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0.
3. On note $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x) \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \ell & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

   (a) Calculer pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

   (b) Montrer que g est dérivable en 0 et donner la valeur de $g'(0)$.

   (c) Montrer que la fonction $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en 0.

   (d) En utilisant la suite $u_n = \cos(n\pi)$, $n \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $h : x \mapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0^+.

   (e) En déduire que $\tilde{\tau} : x \mapsto 3x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0.

   (f) g' est-elle dérivable en 0 ?

   (g) Montrer qu'il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2\epsilon(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

   (h) Peut-on déduire de ce qui précède que g admet un développement limité en 0 à l'ordre 2 ? Si oui, donner l'expression de ce développement limité.

Exercice 2. Soient $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x dans $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = e^{-x}\big(\varphi(x) + \varphi'(x)\big).$$

1. Justifier que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout x dans $\mathbb{R}$, $h'(x)$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$ et $\varphi(b) = \varphi'(b) = 0$.

   (a) Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur $[a, b]$.

   (b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi''(c) = \varphi(c)$.

Exercice 3.

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 des fonctions définies sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$ par
   (a) $g_1 : x \mapsto e^{-x}$.
   (b) $g_2 : x \mapsto \ln(1-x)$.
   (c) $g : x \mapsto \frac{2}{3}e^{-x} + \ln(1-x)$.
   (d) $f_1 : x \mapsto \cos(x)$.
   (e) $f_2 : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.
   (f) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\cos(x)}}$.
2. On considère la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\frac{2}{3}e^{-x} + \ln(1-x)}{\sqrt{\cos(x)}}$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.
   (a) Déduire de ce qui précède le DL en 0 à l'ordre 3 de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\frac{2}{3}e^{-x} + \ln(1-x)}{\sqrt{\cos(x)}}$.
   (b) On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de h. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_h$ en 0, ainsi que la position de $\mathscr{C}_h$ par rapport à cette tangente.

Exercice 4. Soient $k \in]0, +\infty[$, $\beta \in]1, +\infty[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|^{\beta}. \qquad (\star)$$

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion suivante : « f est continue en x_0 ».
   (b) Montrer à l'aide de la définition avec quantificateurs que f est continue en x_0.
   (c) Sans revenir à la définition avec quantificateurs, déterminer $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
   (d) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner pour tout x dans $\mathbb{R}$ la valeur de $f'(x)$.
2. (a) Justifier que f satisfait bien les hypothèses du théorème des accroissements finis sur tout intervalle de la forme $[x, y]$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$.
   (b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$.
3. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
   (a) Traduire à l'aide de quantificateurs l'assertion $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ell$.