Université d'Aix-Marseille **Année 2018-2019**
L1-PEIP **U.E. Introduction à l'Analyse**

Devoir surveillé n°2

Vendredi 16 novembre 2018

durée : 2h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation. Le barème est donné à titre indicatif. ***Les parties 1 et 2 sont à rendre sur des copies séparées.***

PARTIE 1

Exercice 1. [5points]

1. Rappeler les domaines de départ et d'arrivée des fonctions arccosinus et arctangente.
2. Calculer $\arcsin(\sin(\frac{16\pi}{3}))$.
3. On considère une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :
   (a) L'application f tend vers 4 lorsque x tend vers 2.
   (b) L'application f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) L'application f est majorée.
4. On considère l'application $g\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 5x-3 \end{array}$. Montrer à l'aide de la définition avec quantificateurs que g tend vers 7 lorsque x tend vers 2.
5. On considère l'application $h\colon \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ x & \longmapsto & -\sqrt{x-1} \end{array}$. Montrer à l'aide de la définition avec quantificateurs que h tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2. [3points] Déterminer les domaines de définition $\mathscr{D}_f$, $\mathscr{D}_g$ et $\mathscr{D}_h$ des applications suivantes :

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{4-|1-2x|} \end{array},\quad g\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_g & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\big(|x-1|-|2x-4|\big) \end{array},\quad h\colon \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_h & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos(2x)-\sin(x)} \end{array}.$$

Exercice 3. [3points] Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $\sin(2x - \frac{5\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} - x)$.
2. $\cos(x + \frac{3\pi}{4}) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$.
3. $\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}$.

PARTIE 2

Exercice 4. [4points]

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, donner une formule pour $\cos(2x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.
3. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\sin(3x) = \sin(x)(4\cos^2(x) - 1)$.
4. Déduire des questions précédentes une formule pour $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.

Exercice 5. [4points]

1. (a) Soient $a, b \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. Parmi les formules suivantes, laquelle est égale à $\tan(a+b)$?

$$\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)};\ \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)};\ \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)};\ \frac{\tan(a)+\tan(b)}{-1+\tan(a)\tan(b)};\ \frac{\tan(b)-\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

   (b) Soient $a, b \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. Démontrer la formule choisie pour $\tan(a+b)$ à la question précédente.
2. On pose $A = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.
   (a) Montrer que $\frac{3\pi}{4} < A < \frac{3\pi}{2}$.
   (b) Calculer $\tan\big(\arctan(5) + \arctan(8)\big)$.
   (c) En calculant $\tan(A)$, en déduire la valeur de A.

Exercice 6. [3points] Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$.
2. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{(x^2-3x+2)}{x-2}$.
3. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x - \ln(x)$.