Université d'Aix-Marseille **Année 2016-2017**
L1-PEIP **U.E. Introduction Analyse**

Examen DS3
12/01/2017

durée : 2h

Les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.
La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{pour tout réel} \quad x \neq 0.$$

1. Définir $f(0)$ pour que la fonction f soit continue en 0.
2. Calculer la dérivée de f pour tout $x \neq 0$.
3. Calculer $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Que peut-on en déduire sur f?
4. Justifier que $I = f([0, +\infty[)$ est un intervalle puis le calculer.
5. On note g la restriction de f à $[0, +\infty[$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser le domaine de définition de g^{-1}.
6. g^{-1} est-elle dérivable en 0? (Justifier la réponse).
7. Calculer $g(1)$, puis déterminer la valeur de la dérivée de g^{-1} en $\frac{1}{e}$.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\big(\frac{2x}{x^2 - 1}\big) + \arctan\big(\frac{x - 1}{x + 1}\big).$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer sa dérivée f'.
3. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$\arctan\big(\frac{2x}{x^2 - 1}\big) + \arctan\big(\frac{x - 1}{x + 1}\big) + \arctan x + \frac{\pi}{4} = 0.$$

Exercice 3.

1. Calculer $\int \frac{\ln x}{x} dx$.
2. En utilisant des intégrations par parties, calculer $\int x^2 \cos x dx$.
3. En utilisant le changement de variable $t = \sqrt{1+x}$, calculer $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$.

Exercice 4.

1. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'équation différentielle

$$\cos(x)y'(x) + \sin(x)y(x) = 1,$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

2. Déterminer toutes les solutions sur $I\!R$ des équations différentielles suivantes

   (a) $y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 0$.

   (b) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 9$.

   (c) $y''(x) - 4y(x) = e^{4x}$, avec $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$.