Mathématiques 2 : Analyse et Probabilités

Licence MPCI

2018-2019

# Devoir surveillé n°3 : Corrigé

## Exercice 1.

1. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   **Initialisation.** Pour $n = 1$, on a $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{6}{6} = \frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}$, la formule est donc vraie au rang $1$.

   **Hérédité.** Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$. Remarquons que $(n+2)(2n+3) = 2n^2+7n+6$ et alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= (n+1) \times \left(\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}\right) = (n+1) \times \left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right) \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{aligned}$$

   Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence.

2. $\varphi_n$ et $\psi_n$ sont bien dans $\mathscr{E}([0,1])$ car il existe une subdivision $\sigma_n$ de $[0,1]$ adaptée à $\varphi_n$ et $\psi_n$ telle que $\varphi_n$ et $\psi_n$ sont constantes sur chaque sous-intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ de la subdivision $\sigma_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi_n(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_n(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1}-x_i) f(x_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{i+1}{n} - \frac{i}{n}\right) \times \frac{i^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\
&= \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} \\
&= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_n(x)dx &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi_n(x)dx \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i+1}{n}-\frac{i}{n}\right)\times\frac{(i+1)^2}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.
\end{aligned}$$

3. Tout d'abord, si $x=1$, on a $\varphi_n(1)=\psi_n(1)=1=f(1)$ et alors $\varphi_n(1)\leqslant f(1)\leqslant \psi_n(1)$.
   Si $x\in[0,1[$, il existe $i\in\{0,..,n-1\}$ tel que $x\in[x_i,x_{i+1}[$ et alors par croissance de $f$ sur $[0,1]$ on obtient
   $$\varphi_n(x)=f(x_i)\leqslant f(x)\leqslant f(x_{i+1})=\psi_n(x).$$
   On en déduit que pour tout $x$ dans $[0,1]$, $\varphi_n(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi_n(x)$.
   De plus,
   $$\int_0^1(\psi_n-\varphi_n)(x)dx=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}=\frac{6n}{6n^2}\leqslant\frac{1}{n}.$$
   On a donc montré que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe $\varphi_n,\psi_n\in\mathscr{E}([0,1])$ telles que
   $$\varphi_n\leqslant f\leqslant\psi_n \text{ et } \int_0^1(\psi_n-\varphi_n)(x)dx\leqslant\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$
   on en déduit par définition que $f\in\mathscr{R}([0,1])$. De plus,
   $$\int_0^1 f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\varphi_n(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\psi_n(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}.$$

4. Notons $\mu_f=\int_0^1 f(x)dx$.
   (a) On sait que pour tout $x$ dans $[0,1]$ et tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi_n(x)$. En intégrant cette double inégalité, on obtient
   $$\int_0^1\varphi_n(x)dx\leqslant\int_0^1 f(x)dx\leqslant\int_0^1\psi_n(x)dx.\qquad(\star)$$
   Or d'après la question 2.,
   $$\begin{aligned}
   \int_0^1\varphi_n(x)dx &= \frac{1}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\
   &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i^2}{n^2} \\
   &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)-\frac{1}{n}f(\frac{n}{n}) \\
   &= u_n-\frac{1}{n},
   \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^1 \psi_n(x)dx &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2}\\ &= u_n\end{aligned}$$

Alors $(\star)$ devient $u_n - \frac{1}{n} \leqslant \mu_f \leqslant u_n$ et donc $\mu_f \leqslant u_n \leqslant \mu_f + \frac{1}{n}$.

(b) D'après le théorème des gendarmes par passage à la limite dans l'inégalité que l'on vient de démontrer, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mu_f$ autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx,$$

ce qui prouve la propriété de la moyenne pour $f$.

**Exercice 2.** Si $f$ est continue sur le segment $[0,1]$ alors d'après le théorème de Weirestrass elle est bornée et atteint ses bornes sur $[0,1]$. En particulier, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| \leqslant M$. En utilisant ceci et l'inégalité triangulaire, on a

$$|I_n| = \left|\int_0^1 f(t)e^{-nt}dt\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)e^{-nt}|dt = \int_0^1 |f(t)|e^{-nt}dt \leqslant M\int_0^1 e^{-nt}dt = M \times \frac{1-e^{-n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

**Conclusion :** $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**Exercice 3.** Le but de cet exercice est de déterminer la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de

$$v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. On considère les fonctions suivantes, définies de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et continues sur $[0,1]$

$$u : x \mapsto \ln(1+x),\ u' : x \mapsto \frac{1}{1+x},\ v : x \mapsto x+1 \text{ et } v' : x \mapsto 1.$$

Alors, en effectuant une intégration par parties, il vient

$$\int_0^1 \ln(1+x)dx = \int_0^1 u(x)v'(x)dx = \big[(x+1)\ln(1+x)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}dx = 2\ln(2) - 1.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{(2n)!}{n! \times n^n} &= \frac{1\times 2\times ...\times n\times(n+1)\times(n+2)\times ...\times 2n}{n!\times n^n}\\ &= \frac{(n+1)\times(n+2)\times ...\times 2n}{n^n} \text{ il y a } 2n-(n+1)+1 = n \text{ termes au numérateur}\\ &= \frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n}\times ...\times\frac{n+n}{n}\\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)\times ...\times\left(1+\frac{n}{n}\right)\\ &= \prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right).\end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(v_n) = \ln\left(\frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n! \times n^n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

$\ln(v_n)$ est donc la somme de Riemann associée à la fonction $u : x \mapsto \ln(1+x)$. Comme $u$ est dans $\mathscr{R}([0,1])$ d'après la propriété de la moyenne, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln(2) - 1.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = e^{\ln(v_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{2\ln(2)-1} = \dfrac{4}{e}$.

**Exercice 4.** $\forall t \in [0,1]$, $g(t) - a \geqslant 0$ et $b - g(t) \geqslant 0$ donc $(g(t)-a) \times (b - g(t)) \geqslant 0$.
De plus, comme $g$ est continue sur $[0,1]$, on en déduit que $t \mapsto (g(t)-a) \times (b-g(t))$ l'est aussi, ce qui en fait une fonction de $\mathscr{R}([0,1])$. En utilisant les propriétés de l'intégrale de Riemann, il vient

$$\int_0^1 (g(t)-a) \times (b-g(t))dt \geqslant 0.$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale puisque chaque terme est dans $\mathscr{R}([0,1])$, on a

$$\int_0^1 (g(t)-a)\times(b-g(t))dt = \int_0^1 bg(t) - g(t)^2 - ab + ag(t)dt = b\int_0^1 g(t)dt - \int_0^1 g(t)^2dt - ab + a\int_0^1 g(t)dt.$$

Si on suppose que $\displaystyle\int_0^1 g(t)dt = 0$, alors

$$-\int_0^1 g(t)^2dt - ab \geqslant 0 \text{ et donc } \int_0^1 |g(t)|^2dt \leqslant -ab.$$