Mathématiques 2 : Analyse et Probabilités

Licence MPCI

2018-2019

DEVOIR SURVEILLÉ N°3

Jeudi 4 avril 2019

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation. Le barème est donné à titre indicatif et est susceptible d'être légèrement modifié.

Exercice 1 [4 points] On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2, \forall x \in [0,1]$. Le but de cet exercice est de montrer que $f \in \mathscr{R}([0,1])$ et de calculer son intégrale. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit la subdivision régulière de $[0,1]$ suivante

$$\sigma_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{i}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right)$$

on notera $x_i = \frac{i}{n}, \forall i \in \{0, 1, ..., n\}$. On considère les fonctions $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $\psi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$\begin{cases} \varphi_n(x) = f(x_i) \text{ et } \psi_n(x) = f(x_{i+1}) & \text{si} \quad x \in [x_i, x_{i+1}[\quad (0 \leqslant i \leqslant n-1) \\ \varphi_n(x) = 1 \text{ et } \psi_n(x) = 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Justifier brièvement pourquoi φ_n et ψ_n sont dans $\mathscr{E}([0,1])$ puis déterminer $\displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_0^1 \psi_n(x)dx$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Utiliser ce qui précède pour montrer que f est Riemann intégrable sur $[0,1]$ et que
$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}.$$
4. On note μ_f la valeur moyenne de f sur $[0,1]$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right).$$
   (a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité
   $$\mu_f \leqslant u_n \leqslant \mu_f + \frac{1}{n}.$$
   (b) Quel résultat remarquable cette inégalité permet-elle de démontrer sur f ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 [1,5points] Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 f(t)e^{-nt}dt.$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-elle une limite lorsque n tend vers $+\infty$? Si oui, la déterminer.

Exercice 3 [3points] Le but de cet exercice est de déterminer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

1. Montrer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $b > 0$ tels que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)dx = a\ln(b) + c$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{(2n)!}{n! \times n^n} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n)$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 4 [1,5points] Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0 < b$ et $g : [0,1] \to [a,b]$ une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer que

$$\int_0^1 g(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 |g(t)|^2 dt \leqslant -ab.$$