Université d'Aix-Marseille **Année 2017-2018**
L1-PEIP **U.E. Introduction à l'Analyse**

Examen

Mardi 16 janvier 2018

durée : 3h

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés.
La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice A [4pts] On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \arctan(x) + 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. [1pt] Après avoir justifié son existence, déterminer une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$. *Indication : on pourra pour cela utiliser une intégration par parties.*
2. [0,5pt] Dresser le tableau de variations de g.
3. [0,5pt] Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note h sa réciproque.
4. [0,5pt] Calculer $g(0)$, $g(1)$, $h(1)$ et $h(\frac{\pi}{4})$.
5. [0,5pt] Sans calculer h', déterminer le domaine de dérivabilité de h.
6. [1pt] Déterminer une expression de h' en fonction de h et montrer que pour tout x dans le domaine de dérivabilité de h, on a

$$1 + h'(x) + \frac{1}{h^2(x)} = 0.$$

Exercice B [8pts] On considère l'équation différentielle :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{(1-x)(x-\sqrt{x^2-1})}{x^2+2x+4} = 0. \quad (\star)$$

1. (a) [1,5pts] Montrer que pour tout x dans $[1, +\infty[$, argch$(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.
   (b) [0,5pt] Simplifier pour tout x dans $\mathbb{R}$ l'expression $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)$.
   (c) [1,5pts] En utilisant le changement de variables $x =$ ch(t) trouver une primitive de la fonction $a :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $a(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\forall x \in]1, +\infty[$.
   (d) [2pts] Trouver une primitive de la fraction rationnelle $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$r(x) = \frac{x-1}{x^2+2x+4}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. [0,5pt] Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation homogène associée à $(\star)$.
3. [1,5pts] Trouver une solution particulière de l'équation $(\star)$ sur $]1, +\infty[$ en utilisant la méthode de variation de la constante.
4. [0,5pt] Résoudre $(\star)$ sur $]1, +\infty[$.

Exercice C [5pts] On considère l'équation différentielle

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = xe^x + e^{3x}. \tag{1}$$

1. [1pt] Donner la forme générale des solutions de l'équation homogène associée à l'équation différentielle (1).
2. [1pt] Trouver une solution particulière de l'équation différentielle

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = xe^x. \tag{2}$$

   Indication : on pourra, après justification, la chercher sous la forme $y_1(x) = (ax+b)e^x$ *où* a *et* b *sont des réels à déterminer.*
3. [1pt] Trouver une solution particulière de l'équation différentielle

$$y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = e^{3x}. \tag{3}$$

   Indication : on pourra, après justification, la chercher sous la forme $y_2(x) = cx^2e^{3x}$ *où* c *est un réel à déterminer.*
4. [0,5pt] Montrer que $y_1 + y_2$ est une solution particulière de l'équation différentielle (1).
5. [0,5pt] Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle (1).
6. [1pt] Déterminer la ou les solutions (si elles existent) de l'équation différentielle (1) vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice D [5pts]

1. [0,5pt] Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Vérifier que si $x \in [a,b]$, alors $a+b-x \in [a,b]$.
2. [1,5pts] Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $I\!R$ et telle que pour tout x de $[a,b]$, on ait :

$$f(a+b-x) = f(x). \tag{$\star$}$$

   Démontrer que

$$\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx. \tag{$\star\star$}$$

   Indication : on pourra faire le changement de variable $u = a+b-x$ *et utiliser l'égalité* $(\star)$.
3. Application : On suppose à présent que $a = 0, b = \pi$ et $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}.$$

   (a) [1pt] Vérifier que f satisfait l'égalité $(\star)$ pour tout x dans $[0,\pi]$. En déduire que

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

   (b) [0,5pt] Calculer

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2}du.$$

   (c) [1,5pts] À l'aide des questions 3)a) et 3)b), en déduire la valeur de

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

   Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = \cos x$.