

Site : Luminy St-Charles St-Jérôme Cht-Gombert Aix-Montperrin Aubagne-SATIS
Sujet de : 1^{er} semestre 2^{ème} semestre Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence mathématiques et informatique
Code du module : SMIU1 Libellé du module : Introduction à l'analyse
Calculatrices autorisées : NON Documents autorisés : NON

Exercice 1

On considère la fonction f définie par

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n^2 + 2n + 3.$$

1. Est-ce que f est injective ?
2. Est-ce que f est surjective ?
3. Calculer $f^{-1}(\{18\})$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln \left(\frac{e^{2x} + 5}{e^x - 2} \right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Déterminer les limites aux bornes de D_f .
3. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f .
4. On se propose de calculer la dérivée de f .
 - (a) Soit u la fonction définie par $u(x) = \frac{e^{2x} + 5}{e^x - 2}$. Calculer $u'(x)$.
 - (b) En déduire une expression de $f'(x)$.
5. On se propose d'étudier le signe de $f'(x)$.
 - (a) Montrer que

$$f'(x) = \frac{e^x[(e^x + 1)(e^x - 5)]}{(e^x - 2)(e^{2x} + 5)}.$$

- (b) En déduire le signe de $f'(x)$.
- (c) Établir le tableau des variations de f .

Exercice 3

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x^2} \ln(1 + x^2).$$

2. On considère l'équation différentielle sur l'intervalle $]0, +\infty[$

$$y'(x) - \frac{2}{x}y(x) = \ln(1 + x^2). \quad (E_1)$$

- (a) Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E_1) .
- (b) En utilisant la méthode de la variation de la constante (ou méthode de Lagrange), calculer une solution particulière de (E_1) .

- (c) En déduire les solutions de (E_1) .

Exercice 4

On considère l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = -7e^{-3x}. \quad (E_2)$$

1. Donner les solutions de l'équation homogène associée à (E_2) .
2. Trouver un nombre réel k tel que $y : x \mapsto kxe^{-3x}$ soit une solution particulière de l'équation (E_2) .