Mathématiques 2 : Analyse et Probabilités

Aix*Marseille université

Licence MPCI

2018-2019

Examen : Corrigé

Mai 2019

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés. La rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction seront prises en compte dans l'évaluation.

Exercice 1. On considère les fonctions $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ et $g : [-1,2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 \text{ et } g(x) = 2f(x) - \sin(x).$$

1. **Questions préliminaires.**
   (a) Montrer que pour tout x dans $[0,1]$, $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2}$.
   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $|a-b| \leqslant \max(a,b)$.
2. Soit $x \in [0,1]$ fixé. Justifier que f satisfait bien sur $[0,x]$ les hypothèses du Théorème des accroissements finis.
3. À l'aide de ce théorème, montrer que pour tout x dans $[0,1]$, $|f(x)| \geqslant \frac{x}{4}$.
4. Proposer un intervalle ouvert I tel que $[0,1] \subset I$ et $g \in \mathscr{C}^2(I)$.
5. Calculer pour tout x dans I, $g'(x)$ et $g''(x)$.
6. Soit $x \in [0,1]$ fixé. Quel résultat nous permet d'affirmer qu'il existe $v \in]0,x[$ tel que

$$g(x) - g(0) = xg'(0) + \frac{x^2}{2} g''(v). \qquad (\star)$$

7. Utiliser $(\star)$ et les questions préliminaires pour montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|g(x)| \leqslant \frac{x^2}{2}$.

Corrigé :

1. (a) On a comme $2\sqrt{2} \leqslant 4$

$$x \in [0,1] \Rightarrow 2 \leqslant 2\sqrt{1+x} \leqslant 2\sqrt{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2\sqrt{2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Si $a \leqslant b$ alors $|a-b| = b - a \leqslant b = \max(a,b)$ car $a \geqslant 0$. De même, si $a \geqslant b$ alors $|a-b| = a - b \leqslant a = \max(a,b)$ car $b \geqslant 0$. Dans les deux cas, on obtient bien $|a-b| \leqslant \max(a,b)$.

2. Soit $x \in [0,1]$ fixé. Comme $[0,x] \subset [0,1]$, on déduit par la régularité de f sur $[0,1]$ que f est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$. Elle satisfait donc bien sur $[0,x]$ les hypothèses du théorème des accroissements finis.

3. Soit x dans $[0,1]$ fixé. En appliquant théorème des accroissements finis sur $[0,x]$, il existe $c \in]0,x[$ tel que
$$f(x) - f(0) = f'(c)(x-0) = \frac{x}{2\sqrt{1+c}}.$$
Or
$$c \in [0,x] \Rightarrow 1 \leqslant \sqrt{1+c} \leqslant \sqrt{1+x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+c}} \Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{x}{2\sqrt{1+c}}.$$
De plus, comme $x \in [0,1]$, alors d'après la question 1.a), $\dfrac{x}{2\sqrt{1+x}} \geqslant \dfrac{x}{4}$.
Finalement, on obtient bien pour tout $x \in [0,1]$
$$|f(x)| = \frac{x}{2\sqrt{1+c}} \geqslant \frac{x}{2\sqrt{1+x}} \geqslant \frac{x}{4}.$$
4. On pose $I =]-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$. On a bien $[0,1] \subset I$ et g est bien $\mathscr{C}^2$ sur I car g est deux fois dérivable sur I et g'' continue sur I car composée de fonctions régulières sur I.
5. On a pour tout $x \in I$
$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} - \cos(x) \text{ et } g''(x) = \frac{-1}{2(1+x)\sqrt{1+x}} + \sin(x).$$
6. Il s'agit de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à g en 0 à l'ordre 1.
7. D'après $(\star)$, pour tout x dans $[0,1]$ il existe $v \in]0,x[$ tel que
$$g(x) - g(0) = x\Big(\frac{x}{\sqrt{1+0}} - \cos(0)\Big) + \frac{x^2}{2}\Big(\frac{-1}{2(1+v)\sqrt{1+v}} + \sin(v)\Big)$$
ce qui donne
$$g(x) = \frac{x^2}{2}\Big(\frac{-1}{2(1+v)\sqrt{1+v}} + \sin(v)\Big).$$
On a $0 < \frac{1}{2(1+v)\sqrt{1+v}} \leqslant \frac{1}{2}$ et comme $v \in]0,x[\subset [0,1] \subset [0, \frac{\pi}{2}]$, par croissance de la fonction sinus sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ on obtient $\sin(0) = 0 \leqslant \sin(v) \leqslant 1$. Ainsi, en utilisant la question 1., on obtient comme $x \in [0,1]$
$$|g(x)| = \left|\frac{x^2}{2}\Big(\frac{-1}{2(1+v)\sqrt{1+v}} + \sin(v)\Big)\right| \leqslant \frac{x^2}{2}\max\Big(\sin(v), \frac{1}{2(1+v)\sqrt{1+v}}\Big) = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 2. Déterminer la limite de la somme de Riemann suivante
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\Big(\frac{k\pi}{n}\Big).$$

Corrigé : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\sin\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h\Big(\frac{k}{n}\Big)$$
où $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ est définie par $h(x) = x\sin(\pi x)$, $\forall x \in [0,1]$. Comme h est continue sur $[0,1]$, alors $h \in \mathscr{R}([0,1])$ et donc en utilisant la propriété de la moyenne et une intégration par parties, on en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 h(x)dx = \int_0^1 x\sin(\pi x)dx = \big[-\frac{x}{\pi}\cos(\pi x)\big]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\pi}\cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}.$$

Exercice 3. Une électricienne dispose dans sa sacoche de 15 ampoules de tailles différentes dont 5 sont défectueuses. Parmi les non défectueuses, 6 sont à économie d'énergie et 4 ne le sont pas. Elle prend en même temps et au hasard 3 ampoules de sa sacoche pour une intervention.

1. Combien de lots de 3 ampoules peut-elle former ?
2. Combien de lots contiennent exactement une ampoule à économie d'énergie ?
3. Combien de lots contiennent 3 ampoules non défectueuses dont exactement une à économie d'énergie ?
4. Combien de lots contiennent exactement 2 ampoules défectueuses ?
5. Combien de lots contiennent au moins une ampoule défectueuse ?

Corrigé :

1. Nombre de lots de 3 ampoules : $\binom{15}{3}$.
2. Nombre de lots contenant exactement une ampoule à économie d'énergie : $\binom{6}{1}\binom{15-6}{2} = \binom{6}{1}\binom{9}{2}$.
3. Nombre de lots contenant 3 ampoules non défectueuses dont exactement une à économie d'énergie : $\binom{6}{1}\binom{4}{2}$.
4. Nombre de lots contenant exactement 2 ampoules défectueuses : $\binom{5}{2}\binom{10}{1}$.
5. Nombre de lots contenant au moins une ampoule défectueuse : il y a $\binom{10}{3}$ lots contenant 0 ampoule défectueuse donc $\binom{15}{3} - \binom{10}{3}$ lots contenant au moins une ampoule défectueuse.

Exercice 4. Une enseignante dispose d'exercices en analyse et en probabilités et souhaite préparer un sujet d'examen comprenant 5 exercices. Elle hésite sur le nombre d'exercices d'analyse à mettre dans son sujet.

1. Combien de sujets différents peut-elle créer ?
2. Elle décide de mettre au moins un exercice de probabilités dans son sujet. Combien de sujets différents peut-elle créer ?

Corrigé :

1. Il s'agit de placer 5 exercices dans deux tiroirs : un d'analyse et l'autre de probabilités. Il y a donc $\binom{5+2-1}{1} = \binom{5+2-1}{5} = 6$ façons de faire.
2. Cela revient à placer $5-1=4$ exercices dans 2 tiroirs, il y a donc $\binom{4+2-1}{1} = \binom{4+2-1}{4} = 5$ façons de faire.

Exercice 5. Un professeur propose à ses étudiants un examen en forme de QCM. Ce QCM comporte n questions, chacune avec 5 réponses possibles. Pour chaque question, l'étudiant doit cocher une réponse et une seule. On suppose qu'un étudiant répond de manière aléatoire à chacune des n questions. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de réponses correctes obtenues.

1. On suppose dans cette question que $n = 4$.
   (a) Déterminer $\text{Im}(X)$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}([X = k])$ pour tout k dans $\text{Im}(X)$.
   (c) La variable aléatoire X suit-elle une loi de probabilité connue ? Si oui, laquelle ?
   (d) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\text{Var}(X)$.
2. On suppose désormais que le QCM comporte 20 questions (c'est à dire $n = 20$). Chaque bonne réponse rapporte un point et les mauvaises 0 point.
   (a) Calculer la probabilité que l'élève ait la note de 10 sur 20.
   (b) On suppose qu'en comptant les points, le professeur a une probabilité de $\frac{1}{100}$ de rajouter un point à la note finale et une probabilité de $\frac{1}{100}$ d'enlever un point à la note finale en se trompant. On note
   - Y la variable aléatoire réelle représentant la note de l'étudiant.
   - E l'évènement « Le professeur s'est trompé ».
   - E^+ l'évènement « Le professeur s'est trompé en rajoutant un point ».
   - E^- l'évènement « Le professeur s'est trompé en enlevant un point ».

   Calculer les probabilités suivantes :
$$\mathbb{P}(E),\ \mathbb{P}(\overline{E}),\ \mathbb{P}\big([Y = 10] \mid E^+\big),\ \mathbb{P}\big([Y = 10] \mid E^-\big) \text{ et } \mathbb{P}\big([Y = 10] \mid \overline{E}\big).$$
   (c) À l'aide de ce qui précède, calculer $\mathbb{P}([Y = 10])$.

Corrigé :

1. On suppose dans cette question que $n = 4$.
   (a) On a $\text{Im}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
   (b) Pour une question donnée, on a une probabilité de $\frac{1}{5}$ de cocher la bonne réponse et pour tout k dans $\text{Im}(X)$, on a $\binom{4}{k}$ façons de choisir k questions parmi 4 auxquelles on répond correctement. Finalement, pour tout k dans $\text{Im}(X)$, on a $\mathbb{P}([X = k]) = \binom{4}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k \times \left(\frac{4}{5}\right)^{4-k}$.
   (c) X suit la loi binomiale de paramètres $(4, \frac{1}{5})$. On note $X \sim \mathscr{B}(4, \frac{1}{5})$.
   (d) On a $\mathbb{E}(X) = 4 \times \frac{1}{5}$ et $\text{Var}(X) = 4 \times \frac{1}{5}(1 - \frac{1}{5}) = \frac{16}{25}$.
2. On suppose désormais que le QCM comporte 20 questions (c'est à dire $n = 20$). Chaque bonne réponse rapporte un point et les mauvaises 0 point.
   (a) L'évènement demandé correspond à $[X = 10]$. Comme $X \sim \mathscr{B}(20, \frac{1}{5})$, on obtient
$$\mathbb{P}([X = 10]) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{20-10} = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{10}.$$
   (b) • Comme $E = E^+ \cup E^-$, on a $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E^+) + \mathbb{P}(E^-) - \mathbb{P}(E^+ \cap E^-) = 0,01 + 0,01 - 0 = 0,02$ car E^+ et E^- sont deux évènements incompatibles.
   • $\mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \mathbb{P}(E) = 0,98$.
   • $\mathbb{P}\big([Y = 10] \mid E^+\big) = \mathbb{P}([X = 9]) = \binom{20}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^9 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{11}$.
   • $\mathbb{P}\big([Y = 10] \mid E^-\big) = \mathbb{P}([X = 11]) = \binom{20}{11}\left(\frac{1}{5}\right)^{11} \times \left(\frac{4}{5}\right)^9$.
   • $\mathbb{P}\big([Y = 10] \mid \overline{E}\big) = \mathbb{P}([X = 10]) = \binom{20}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$.

(c) Comme $\{E^+, E^-, \overline{E}\}$ forme un système complet d'évènement, on en déduit d'après la formule des probabilités totales que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=10]) &= \mathbb{P}\big([Y=10] \mid E^+\big)\mathbb{P}(E^+) + \mathbb{P}\big([Y=10] \mid E^-\big)\mathbb{P}(E^-) + \mathbb{P}\big([Y=10] \mid \overline{E}\big)\mathbb{P}(\overline{E}) \\
&= 0,01\binom{20}{9}\left(\frac{1}{5}\right)^9\left(\frac{4}{5}\right)^{11} + 0,01\binom{20}{11}\left(\frac{1}{5}\right)^{11}\left(\frac{4}{5}\right)^9 + 0,98\binom{20}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}.
\end{aligned}$$

(d) En comparant les valeurs de $\mathbb{P}([X=10])$ et $\mathbb{P}([Y=10])$, quelle conclusion peut-on tirer ?