Mathématiques 2 : Analyse et Probabilités

Licence MPCI

2018-2019

EXAMEN

Mai 2019

Les calculatrices, les rapporteurs trigonométriques, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisés.

Exercice 1. On considère les fonctions $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ et $g : [-1,2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1+x} - 1 \text{ et } g(x) = 2f(x) - \sin(x).$$

1. Questions préliminaires.
   (a) Montrer que pour tout x dans $[0,1]$, $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $|a-b| \leqslant \max(a,b)$.
   Indication : on rappelle que $\max(a,b) = a$ *si* $a \geqslant b$ *et* $\max(a,b) = b$ *si* $a \leqslant b$.
2. Soit $x \in [0,1]$ fixé. Justifier que f satisfait bien sur $[0,x]$ les hypothèses du théorème des accroissements finis.
3. À l'aide de ce théorème, montrer que pour tout x dans $[0,1]$, $|f(x)| \geqslant \dfrac{x}{4}$.
4. Proposer un intervalle ouvert I tel que $[0,1] \subset I$ et $g \in \mathscr{C}^2(I)$.
5. Calculer pour tout x dans I, $g'(x)$ et $g''(x)$.
6. Soit $x \in [0,1]$ fixé. Quel résultat nous permet d'affirmer qu'il existe $v \in]0,x[$ tel que
$$g(x) - g(0) = xg'(0) + \frac{x^2}{2} g''(v). \qquad (\star)$$
7. Utiliser $(\star)$ et les questions préliminaires pour montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|g(x)| \leqslant \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 2. Déterminer la limite de la somme de Riemann suivante $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 3. Une électricienne dispose dans sa sacoche de 15 ampoules de tailles différentes dont 5 sont défectueuses. Parmi les non défectueuses, 6 sont à économie d'énergie et 4 ne le sont pas. Parmi les ampoules défectueuses, aucune n'est à économie d'énergie. Elle prend en même temps et au hasard 3 ampoules de sa sacoche pour une intervention.

1. Combien de lots de 3 ampoules peut-elle former ?
2. Combien de lots contiennent exactement une ampoule à économie d'énergie ?
3. Combien de lots contiennent exactement 3 ampoules non défectueuses dont exactement une à économie d'énergie ?
4. Combien de lots contiennent exactement 2 ampoules défectueuses ?
5. Combien de lots contiennent au moins une ampoule défectueuse ?

Exercice 4. Une enseignante dispose d'exercices d'analyse et de probabilités et souhaite préparer un sujet d'examen comprenant 5 exercices. Elle hésite sur le nombre d'exercices d'analyse à mettre dans son sujet.

1. Combien de sujets différents peut-elle créer ?
2. Elle décide de mettre au moins un exercice de probabilités dans son sujet. Combien de sujets différents peut-elle créer ?

Exercice 5. Un professeur propose à ses étudiants un examen en forme de QCM. Ce QCM comporte n questions, chacune avec 5 réponses possibles. Pour chaque question, l'étudiant doit cocher une réponse et une seule. On suppose qu'un étudiant répond de manière aléatoire à chacune des n questions. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de réponses correctes obtenues.

1. On suppose dans cette question que $n = 4$.
   (a) Déterminer $\mathrm{Im}(X)$.
   (b) Déterminer $\mathbb{P}([X = k])$ pour tout k dans $\mathrm{Im}(X)$.
   (c) La variable aléatoire X suit-elle une loi de probabilité connue ? Si oui, laquelle ?
   (d) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
2. On suppose désormais que le QCM comporte 20 questions (c'est à dire $n = 20$). Chaque bonne réponse rapporte un point et les mauvaises 0 point.
   (a) Calculer la probabilité que l'élève ait la note de 10 sur 20.
   (b) On suppose qu'en comptant les points, le professeur a une probabilité de $\frac{1}{100}$ de rajouter un point à la note finale et une probabilité de $\frac{1}{100}$ d'enlever un point à la note finale en se trompant. On note
   - Y la variable aléatoire réelle représentant la note de l'étudiant.
   - E l'évènement « Le professeur s'est trompé ».
   - E^+ l'évènement « Le professeur s'est trompé en rajoutant un point ».
   - E^- l'évènement « Le professeur s'est trompé en enlevant un point ».

   Calculer les probabilités suivantes :
   $$\mathbb{P}(E),\ \mathbb{P}(\overline{E}),\ \mathbb{P}\big([Y = 10] \mid E^+\big),\ \mathbb{P}\big([Y = 10] \mid E^-\big) \text{ et } \mathbb{P}\big([Y = 10] \mid \overline{E}\big).$$
   (c) À l'aide de ce qui précède, calculer $\mathbb{P}([Y = 10])$.