Année universitaire 2015-2016

Site : ☐ Luminy ☐ St-Charles ☐ St-Jrôme ☐ Cht-Gombert ☐ Aix-Montperrin ☐ Aubagne-SATIS
Sujet de : ☐ 1er semestre ☐ 2me semestre ☐ Session 2 e Dure de l'preuve : 2h
Examen de : L1 Nom du diplôme : Licence mathmatiques et informatique
Code du module : SMIU1 e Libell du module : Introduction l'analyse
Calculatrices autorises : NON Documents autoriss : NON

Exercice 1. Pour tout entier naturel n, on définit l'assertion $P(n)$ suivante

$$(\forall x \in \mathbb{R})[(x^2 + 2nx + 8 \geqslant 0) \Rightarrow (x^2 + 2x + 3 \geqslant n)].$$

1. Ecrire la contraposée de $P(n)$.
2. Ecrire la négation de $P(n)$.
3. Démontrer que l'assertion $P(3)$ est fausse.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{\tfrac{1}{2} + x}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.On notera E cet ensemble.
3. Démontrer que pour tout $x \in E$,
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$$
4. Déduire de la question précédente une expression plus simple de la fonction f.

Exercice 3. Intégrales

1. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale
$$\int_0^1 \frac{x^3}{1 + x^4}\, \mathrm{d}x.$$
2. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x + 1)\cos(x)\, \mathrm{d}x.$$
3. Justifier l'existence puis calculer l'intégrale suivante en faisant le changement de variables $x = \sin(t)$
$$I = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Exercice 4. Equations différentielles

1. Résoudre l'équation différentielle
$$y'(x) - 2xy(x) = 0.$$

2. En utilisant la méthode de variation de la constante (ou méthode de Lagrange), trouver une solution particulière de l'équation différentielle
$$y'(x) - 2xy(x) = (1 - 2x)\exp(x).$$
3. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle
$$y'(x) - 2xy(x) = (1 - 2x)\exp(x).$$

Exercice 5. Soient A et B deux ensembles et soit $f : A \to B$ une application.

1. Que signifie "$f : A \to B$ est surjective" ?
2. Soit $g : B \to A$ une application. On suppose que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. Démontrer que g est surjective.