L1 MCPI	**Analyse et probabilités**	2019-2020
	DEVOIR MAISON à rendre pour <u>le 13 mars 2020</u>	

Exercice 1. On considère la fonction $h : x \mapsto \cos(x)\sin(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Donner le DL en 0 à l'ordre 4 de h.
2. En déduire une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_h$ en 0 puis déterminer la position de la tangente par rapport à $\mathscr{C}_h$ au voisinage de 0.

Exercice 2. En écrivant le DL en 1 des fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}-1$ et $g : x \mapsto \ln(x)$ à un ordre $n_0 \in \mathbb{N}^*$ judicieusement choisi, déterminer la limite suivante : $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)}$.

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue et bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la composition $g \circ f$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathscr{E}([-1,1])$ et la subdivision régulière de $[-1,1]$ suivante

$$\sigma = \Big(-1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{i}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{i}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\Big).$$

Montrer que si φ est paire alors $\int_{-1}^{1} \varphi(x)dx = 2\int_0^1 \varphi(x)dx$.

Exercice 5. On définit une fonction $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \in]0,1]$ et $h(0) = 0$.

1. h est-elle continue sur $[0,1]$? *(Justifier votre réponse)*
2. h est-elle monotone sur $[0,1]$? *(Justifier votre réponse)*
3. Soit $0 < \epsilon < 1$ fixé.
   (a) Montrer qu'il existe $\varphi_\epsilon, \psi_\epsilon \in \mathscr{E}([\epsilon,1])$ telles que
   $$\forall x \in [\epsilon,1], \varphi_\epsilon(x) \leqslant h(x) \leqslant \psi_\epsilon(x) \text{ et } \int_\epsilon^1 (\psi_\epsilon - \varphi_\epsilon)(x)dx \leqslant \epsilon.$$
   (b) Borner la fonction h sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in \mathscr{E}([0,1])$ égales respectivement à φ_ϵ et ψ_ϵ sur $[\epsilon,1]$ et telles que
   $$\forall x \in [0,1], \tilde{\varphi}(x) \leqslant h(x) \leqslant \tilde{\psi}(x) \text{ et } \int_0^1 (\tilde{\psi} - \tilde{\varphi})(x)dx \leqslant 3\epsilon.$$
   (c) Peut-on déduire de ce qui précède que $h \in \mathscr{R}([0,1])$?

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Les égalités suivantes sont-elles vraies ? Si oui les démontrer, sinon, trouver un contre-exemple.

1. $\int_a^b (f(x))^2 dx = \left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$.
2. $\int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.
3. Si de plus $f \geqslant 0$, $\int_a^b \sqrt{f(x)}dx = \sqrt{\int_a^b f(x)dx}$.