Université Aix-Marseille 2015–2016

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ N° 1

Vendredi 16 octobre 2015

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices et les téléphones portables sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1 et 2, l'autre les exercices 3, 4, et 5

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Exercice 1. (Questions de cours - 5 points)

1. Rappeler les formules qui donnent $\sin(x + y)$ et $\cos(x + y)$ en fonction de $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$ et $\sin y$.
2. En déduire une formule ne faisant intervenir qu'un produit de sinus et cosinus pour l'expression
$$\sin p - \sin q.$$
3. Il est bien connu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Montrer une formule analogue liant $\cosh x$ et $\sinh x$.
4. Énoncer (sans preuve) le "théorème des gendarmes" dans le cas de limite finie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
5. Rappeler les définitions d'injectivité et de surjectivité.

   Pour les réponses aux questions on renvoie au cours.
6. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective, mais pas surjective. Puis donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective, mais pas injective.

   Un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective, mais pas surjective, est donné par $f(n) = n + 1$. En effet, $f(n) = f(m) \Rightarrow n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$, donc f est injective. D'autre côté, il n'existe aucun $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$, donc f n'est pas surjective.

   Un exemple d'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjective, mais pas injective, est donné par
$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

   L'application est bien définie. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $fg(2m) = m$, donc g est surjective. D'autre côté, g n'est pas injective, car $g(0) = g(1) = 0$.

Exercice 2. (5 points)

(a) Rechercher dans $\mathbb{R}$ les solutions de
$$2 \ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \ln x + \ln 3.$$

On remarque que, pour que les quantités soient définies, il faut que $x > -3$ et $x > 0$, c'est-à-dire $x > 0$. En utilisant les propriétés du logarithme on a

$$\ln\left[\left(\frac{x+3}{2}\right)^2\right] = \ln 3x \Leftrightarrow \left(\frac{x+3}{2}\right)^2 = 3x \Leftrightarrow x = 3$$

qui est une solution admissible, car $3 > 0$.

(b) Résoudre les équations suivantes :

(i) $\cos 4x = \sin 7x$;

$$\cos 4x = \sin 7x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} - 7x + 2k\pi \text{ ou } 4x = 7x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

où $k \in \mathbb{Z}$. Au final,

$$x = \frac{\pi}{22} + \frac{2k\pi}{11} \quad \text{ou} \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) $\cos^2 x = \dfrac{1}{4}$;

$$\cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos x = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) $\sin 2x = \cos^2 x$;

$$\sin 2x = \cos^2 x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos x = 0 \quad \text{ou} \quad \tan x = \frac{1}{2}$$

La première équation a comme solution $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, et la deuxième $x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

(iv) $\cos x + \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{4} - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

Exercice 3. (2 points)

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ l'application définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Calculer $(f \circ f)(x)$. En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

$$(f \circ f)(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}} = x \qquad (*)$$

Il est donc facile de vérifier que:

- f est surjective: $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ t.q. $f(x) = y$: il suffit de choisir $x = f(y)$.
- f est injective: soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, ce qui implique $x_1 = x_2$ grâce à la propriété $(*)$.

Comme $(f \circ f)(x) = x$, l'application réciproque $f^{-1} = f$.

Exercice 4. (6 points)

(a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$, f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Après avoir rappelé les définitions de $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$, et de $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, montrer en utilisant la définition que

$$\lim_{x \to 1} (3x - 2) = 1, \qquad \lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$|3x - 1 - 2| = 3|x - 1|$$

Si on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, on a

$$|x - 1| < \delta \Rightarrow |(3x - 1) - 2| < \varepsilon$$

ce qui revient à dire que $\lim_{x \to 1} (3x - 2) = 1$.

Soit $M > 0$. On a

$$\frac{1}{(x-2)^2} > M \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Il suffit de choisir $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ pour avoir

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow \frac{1}{(x-2)^2} > M$$

ce qui revient à dire que $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

(b) Calculer, en justifiant chaque étape par des résultats du cours, les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(\sin x + 2) + \cos x}{x + 2}$$

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \to 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \quad \text{pour } x \to 0$$

On a utilisé la limite remarquable $\frac{\sin x}{x} \to 1$ pour $x \to 0$ (avec le changement de variable $y = 2x$ et $y = 3x$ respectivement) et le fait que la limite du produit est égale au produit des limites (si limites finies)

$$\frac{\sin 2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \to 0 \quad \text{pour } x \to 0^+$$

On a utilisé la limite remarquable $\frac{\sin x}{x} \to 1$ pour $x \to 0$ (avec le changement de variable $y = 2x$) et le fait que la limite du produit est égale au produit des limites (si limites finies)

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{x} = \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \to 1 \cdot 1 = 1 \quad \text{pour } x \to 0$$

Pour la première limite, on fait le changement de variable $y = \sin x$ ($x \to 0 \Rightarrow y \to 0$), et on utilise la limite remarquable $\frac{\ln(1+y)}{y} \to 1$ pour $y \to 0$. La deuxième limite est la limite remarquable $\frac{\sin x}{x} \to 1$ pour $x \to 0$. Ensuite, encore la propriété sur le produit de limites.

$$\frac{x^2(\sin x + 2) + \cos x}{x+2} \geq \frac{x^2 - 1}{x+2} = \frac{x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{1 + \frac{2}{x}} \to +\infty$$

et donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(\sin x + 2) + \cos x}{x+2} = +\infty$$

On a utilisé: limite de la somme, du produit, du quotient, et le théorème de comparaison unilatéral.

Exercice 5. (4 points)

(a) Soit I un intervalle, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire en langage mathématique la proposition suivante :

"f n'est pas continue en x_0"

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \forall \delta > 0, \exists x \in I \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\text{ t.q. } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$

(b) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en $x_0 = 0$.

$|x| = x$ si $x \geq 0$, et $|x| = -x$ si $x < 0$. La fonction f peut donc être écrite comme

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et donc $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, et ces valeurs sont différentes de $f(0)$. Si on utilise le point (a), on peut choisir $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour chaque $\delta > 0$, on peut choisir $x = \frac{\delta}{2}$, et $|f(x) - f(0)| = 1 \geq \frac{1}{2}$. Donc f n'est pas continue en $x_0 = 0$.

(c) La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) := \begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi x}{|x|}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Oui, car $\frac{\pi x}{|x|} = \pi$ si $x > 0$, et $\frac{\pi x}{|x|} = -\pi$ si $x < 0$. Comme $\sin(\pi) = \sin(-\pi) = 0$, la fonction g est identiquement nulle, donc continue.