Université Aix-Marseille 2014–2015

Parcours PEIP - **Introduction à l'analyse**

Corrigé du devoir surveillé n° 1

Exercice 1.

Pour que f soit définie en $x \in \mathbb{R}$, il faut que la fonction racine soit définie en $1 - |x-1|$, c'est-à-dire que

$$1 - |x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

La fonction f est donc définie sur $[0,2]$.

Pour que g soit définie en $x \in \mathbb{R}$, il faut que

1. la fonction racine soit définie en $3-x$, c'est-à-dire
$$3 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3\ ;$$
2. la fonction logarithme soit définie en $x - \sqrt{3-x}$, c'est-à-dire
$$\begin{aligned} x - \sqrt{3-x} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x > \sqrt{3-x} \ \Leftrightarrow \ x^2 > 3 - x \text{ et } x > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 3 > 0 \text{ et } x > 0 \end{aligned}$$

   On reconnait un polynôme du second degré de discrimant égal à $\Delta = 1+12 = 13$. De plus le coefficient dominant est positif, le polynôme n'est donc négatif qu'entre ses deux racines, à savoir $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < 0$ et $\frac{-1+\sqrt{13}}{2} > 0$. La condition devient donc $x > \frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

On a $\frac{\sqrt{13}-1}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2} < \frac{\sqrt{16}}{2} = 2 < 3$. La fonction g est donc définie sur $\left]\frac{\sqrt{13}-1}{2}, 3\right]$.

Pour que h soit définie en $x \in \mathbb{R}$, il faut que

1. la fonction racine soit définie en x, c'est-à-dire que $x \geq 0$;
2. la fonction tangente soit définie en $\cos(\sqrt{x})$, c'est-à-dire que $\cos(\sqrt{x}) \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Or comme $\cos(\sqrt{x}) \in [-1,1]$ et comme $\frac{\pi}{2} > \frac{3}{2} > 1$, ceci est toujours le cas ;
3. la fonction inverse soit définie en $\tan(\cos(\sqrt{x}))$, c'est-à-dire
$$\begin{aligned} \tan\big(\cos(\sqrt{x})\big) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(\sqrt{x}) \neq k\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(\sqrt{x}) \neq 0 \text{ car } \cos(\sqrt{x}) \in [-1,1] \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ car } \sqrt{x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La fonction h est donc définie sur $[0, +\infty[\setminus \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 \big| k \in \mathbb{N} \right\}$.

Exercice 2.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{aligned} \cos(3x) &= \cos\big(x + 2x\big) \ = \ \cos(x)\cos(2x) - \sin(x)\sin(2x) \\ &= \cos(x)\big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big) - 2\sin^2(x)\cos(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) \ = \ \cos^3(x) - 3\big(1 - \cos^2(x)\big)\cos(x) \\ &= 4\cos^3(x) - 3\cos(x). \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\cos 3x = 4\sqrt{3}\,\cos^2 x - 6\cos x &\Leftrightarrow 4\cos^3(x) - 3\cos(x) = 4\sqrt{3}\,\cos^2 x - 6\cos x\\ &\Leftrightarrow \left(4\cos^2(x) - 4\sqrt{3}\,\cos(x) + 3\right)\cos(x) = 0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos(x) = 0\\ \qquad\text{ou}\\ 4\cos^2(x) - 4\sqrt{3}\,\cos(x) + 3 = 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

On reconnait une équation polynomiale du second degré de discriminant $\Delta = 4^2.3 - 4^2.3 = 0$ possédant donc une unique racine (double) égale à $\frac{4\sqrt{3}}{2.4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
L'équation est donc vérifiée ssi $\cos(x) = 0$ ou $\frac{\sqrt{3}}{2}$. L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 3. Soit (x, y) un couple solution de l'équation. En multipliant la seconde équation par -2 en en l'ajoutant à la première, on obtient $8^x - 2^{x+1} = 0$, c'est-à-dire $2^{3x} = 2^{x+1}$. Or la fonction $(x \mapsto 2^x)$ est strictement croissante donc injective. On obtient alors $3x = x + 1$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{2}$. La deuxième équation du système de départ donne alors $y = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{5} = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Réciproquement, on a bien

$$8^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} = 10\frac{\sqrt{2}}{5} \qquad \text{et} \qquad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 5\frac{\sqrt{2}}{5}.$$

L'unique solution du système est donc $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)$.

Exercice 4.

1. Une application $f : A \to B$ est dite surjective ssi

$$\forall y \in B, \exists x \in A, f(x) = y.$$

2. Soit $f : A \to B$ une application. Si f est bijective, alors on définit son application réciproque $f^{-1} : B \to A$ par, pour tout $x \in B$, $f^{-1}(x) =$l'unique antécédent de x dans A par f.
3. L'application f_1 est surjective car pour tout $x_0 \in [0, +\infty[$, on a $f_1\left(-\frac{x_0}{2}\right) = x_0$. Elle n'est par contre pas injective car elle est constante égale à 0 sur tous les réels positifs ou nuls.

   L'application f_2 n'est pas surjective car $-2 \in \mathbb{R}$ n'a pas d'antécédent. En effet

$$f_2(x) = -2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3+2x}{2-x} = -2 \quad\Leftrightarrow\quad 3 + 2x = 2x - 4 \quad\Leftrightarrow\quad 3 = -4$$

   ce qui n'a pas de solution. Elle est par contre injective car, pour tous $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a

$$\begin{aligned}f_2(x) = f_2(y) \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{3+2x}{2-x} = \frac{3+2y}{2-y} \quad\Leftrightarrow\quad (3+2x)(2-y) = (2-x)(3+2y)\\ &\Leftrightarrow\quad 6 + 4x - 3y - 2xy = 6 + 4y - 3x - 2yx \quad\Leftrightarrow\quad 7x = 7y \quad\Leftrightarrow\quad x = y.\end{aligned}$$

   L'application f_3 est surjective car, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a $f_3(0, x_0) = x_0$. Elle n'est par contre pas injective car $f_3(0,0) = 0 = f_3(1, -2)$.

L'application f_4 est bijective. En effet, pour tout $y_0 \in]1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = y_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{e^x+1}{e^x-1} = y_0 \quad \Leftrightarrow \quad e^x + 1 = y_0(e^x - 1) \\ &\Leftrightarrow \quad (y_0 - 1)e^x = y_0 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \frac{y_0+1}{y_0-1} \text{ car } y_0 \neq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{y_0+1}{y_0-1}\right) \text{ car } \frac{y_0+1}{y_0-1} > 0 \text{ puisque } y_0 > 1. \end{aligned}$$

Cela montre que tout élément de $]1, +\infty[$ possède un unique antécédent. Cela montre de plus que, pour tout $x \in]1, +\infty[$, on a $f_4^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

L'application f_5 n'est pas surjective car les seules solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f_5(x) = \frac{1}{3}$ sont $\pm\sqrt{2}$, mais qu'aucune n'est dans $\mathbb{N}$. Elle est par contre injective car, pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, on a

$$f_5(x) = f_5(y) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \text{ car } x, y \geq 0.$$

Exercice 5.

1. L'application f est définie sur $\mathbb{R}$ et g va dans $[0, +\infty[\subset \mathbb{R}$,$f \circ g$ est donc bien définie.

   L'application g est définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et f va dans $[0, 1[\subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g \circ f$ est donc bien définie.

   L'application h est définie sur $[0, 1]$ et g va dans $[0, +\infty[\not\subset [0, 1]$,$h \circ g$ n'est donc pas définie.

   L'application h est définie sur $[0, 1]$ et k va dans $[0, 1[\subset [0, 1]$, $h \circ k$ est donc bien définie.
2. Les applications $f \circ g$ et $h \circ k$ sont toutes les deux définies sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et vont dans $[0, 1]$. Elles ont donc bien les même espaces de départ et d'arrivée.

   De plus, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) \quad &= \quad f\big(g(x)\big) \quad = \quad \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} \\ &= \quad \frac{\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ &= \quad \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)+\sin^2(x)} \quad = \quad \sin^2(x) \quad = \quad h\big(k(x)\big) \quad = \quad (h \circ k)(x). \end{aligned}$$

   Les applications $f \circ g$ et $h \circ k$ sont donc égales.