Université Aix-Marseille 2015–2016

PARCOURS PEIP - **Introduction à l'analyse**

DEVOIR SURVEILLÉ N° 3

Mardi 12 janvier 2016

Il sera tenu compte de la présentation et de la clarté de la rédaction. Toute réponse devra être justifiée.
Les calculatrices et les téléphones portables sont rigoureusement interdits.
Le barème n'est indiqué qu'à titre indicatif, et pourra être éventuellement modifié.

Il est demandé de rendre impérativement DEUX copies :
l'une comportant les exercices 1 et 2, l'autre les exercices 3 et 4.

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Exercice 1. (Questions de cours - 3,5 points)

1. Soit I un intervalle, soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Montrer la formule d'intégration par parties:
$$\int fg' = fg - \int f'g$$
La fonction définie par $x \mapsto f(x)g(x)$ est dérivable (en tant que produit de fonctions dérivables), et $(fg)' = f'g + fg'$. fg est donc une primitive de $f'g + fg'$, d'où
$$fg = \int f'g + \int fg' \Rightarrow \int fg' = fg - \int f'g$$

2. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction, $F :]a, b[\to \mathbb{R}$ une primitive de f sur $]a, b[$. Montrer que $G :]a, b[\to \mathbb{R}$ est une primitive de f *si et seulement si* il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]a, b[$, $G(x) = F(x) + c$.
Si $G(x) = F(x) + c$, alors $G'(x) = F'(x) = f$ pour tout $x \in]a, b[$. Réciproquement, si F est G sont deux primitives de f sur $]a, b[$, on a $(F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$, et donc $F - G$ est constante sur $]a, b[$ (puisque $]a, b[$ est un intervalle). Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in]a, b[$, $G(x) = F(x) + c$.

3. Soient y_1, $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle
$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0$$
où a, $b \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ est une solution de la même équation.
On a
$$[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)]'' + a[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)]' + b[c_1y_1(x) + c_2y_2(x)] = c_1[y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)] + c_2[y_2''(x) + ay_2'(x) +$$

Exercice 2. (8,5 points)

Donner l'ensemble des x pour lesquels les primitives suivantes existent, puis calculer ces primitives :

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2 - 1} + c$ (définie sur $] - \infty, -1[\cup]1, +\infty[$)

2. $\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$ Cette primitive est définie pour $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ on obtient $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$ et donc

$$\int \sin^3(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + c.$$

3. $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser le changement de variables $t = e^x$)

   Cette primitive est définie lorsque $e^{2x} < 1 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[$. Par conséquent, $t \in]0,1[$. Comme $x = \ln t$, formellement on obtient $\mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ et donc

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin t + c = \arcsin e^x + c.$$

4. $\int \sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x$ (on pourra utiliser le changement de variables $x = 2\cosh t$ pour $x \in [2, +\infty[$)

   Cette primitive est définie lorsque $x^2 \geq 4 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$. Pour $x \in [2, +\infty[$, on peut utiliser le changement de variable $x = 2\cosh t$ qui donne formellement $\mathrm{d}x = 2\sinh t\mathrm{d}t$. On a donc

$$\int \sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x = 4\int \sinh^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{2t} - t - \frac{1}{2}e^{-2t} = \sinh\left(2\mathrm{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \mathrm{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

   L'expression peut être encore simplifiée par

$$\begin{aligned} &\sinh\left(2\mathrm{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \mathrm{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= 2\sinh\left(\mathrm{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cosh\left(\mathrm{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right)\right) - \mathrm{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}\cdot\frac{x}{2} - \mathrm{arcosh}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

5. $\int \frac{x^3+3x^2+x}{x^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x$ Cette primitive est définie sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On a

$$\int \frac{x^3+3x^2+x}{x^2(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+3x+1}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

   La première primitive est clairement

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + c$$

   tandis que la deuxième est donnée par

$$\int \frac{2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\int \frac{2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

Exercice 3. (3,5 points)

On considère l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \qquad y'(x) - 2xy(x) = \frac{2x}{1+x^2}e^{x^2}.$$

1. Trouver la solution générale de l'équation homogène associée à (E).

   La solution de l'équation homogène associée $y'(x) = 2xy(x)$ est donnée par $y_h(x) = ce^{x^2}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

2. En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre l'equation (E).

   On cherche une solution particulière de la forme $y_p(x) = c(x)e^{x^2}$. On a $y_p'(x) = c'(x)e^{x^2} + 2xc(x)e^{x^2}$ et donc, en remplaçant dans l'équation,

$$c'(x)e^{x^2} + 2xc(x)e^{x^2} = 2xc(x)e^{x^2} + \frac{2x}{1+x^2}e^{x^2} \Rightarrow c'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow c(x) = \ln(1+x^2).$$

   Une solution particulière est donc donnée par $y_p(x) = (\ln(1+x^2))e^{x^2}$, et la solution générale de (E)

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{x^2} + (\ln(1+x^2))e^{x^2} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

   et donc la solution est donnée par

$$y(x) = e^{x^2} + (\ln(1+x^2))e^{x^2}.$$

Exercice 4. (4,5 points)

Résoudre les équations différentielles:

1. $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$;

   Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 4\lambda + 3$, dont les racines sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$. La solution générale est donc

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{3x} \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

   Si on impose les conditions initiales on obtient les deux équations $c_1 + c_2 = 2$ et $c_1 + 3c_2 = 4$, qui ont comme solution $c_1 = c_2 = 1$. La solution de l'équation est donc

$$y(x) = e^x + e^{3x}.$$

2. $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 18x^2 + 9x$;

   Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 - 6\lambda + 9$, dont les racines sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (racine réelle double). La solution de l'équation homogène associée est donc

$$y_h(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

   On peut chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de dégré 2. On trouve

$$y_p(x) = 2x^2 + \frac{11}{3}x + 2$$

   et donc la solution générale est donnée par

$$y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + 2x^2 + \frac{11}{3}x + 2 \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = \cos(x)$.

   Le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + 4\lambda + 5$, dont les racines sont $\lambda_1 = -2 - i$ et $\lambda_2 = -2 + i$. La solution de l'équation homogène associée est donc

   $$y_h(x) = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

   On peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \alpha \cos x + \beta \sin x$ (on remarque que i n'est pas racine du polynôme caractéristique, en particulier $\cos x$ n'est pas solution de l'équation homogène associée). On trouve

   $$y_p(x) = \frac{1}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x$$

   et donc la solution générale est donnée par

   $$y(x) = c_1 e^{-2x} \cos x + c_2 e^{-2x} \sin x + \frac{1}{8} \cos x + \frac{1}{8} \sin x \qquad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$