Aix–Marseille Université 2018-2019

Introduction à l'Analyse

Parcours PEIP

Planche 5 - Équations différentielles

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Remarque : Les exercices et questions précédés du symbole ♣ sont facultatifs et ne seront pas prioritairement corrigés en séance.

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y'(x) - 3y(x) = 0$.
2. $y'(x) + x^2 y(x) = 0$.
3. $3y'(x) = \cos(x)y(x)$ avec $y(0) = -1$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode de variation de la constante. :

1. $y'(x) + y(x) = \cos(x)$.
2. $y'(x) - 2xy(x) = x$.
3. $y'(x) + 3y(x) = 2e^{-x}$ avec $y(0) = 1$.

♣ **Exercice 3.** On considère l'équation différentielle :

$$y'(x) + \frac{y(x)}{\sqrt{1+x^2}} + 1 = 0, \ x \in \mathbb{R}. \quad (\star)$$

1. Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.
2. En utilisant le changement de variables $x = \operatorname{sh}(\mathrm{t})$ trouver une primitive de la fonction $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $a(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation homogène associée à $(\star)$.
4. Trouver une solution particulière de l'équation $(\star)$ en utilisant la méthode de variation de la constante.
5. Résoudre $(\star)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I proposé en utilisant la méthode de variation de la constante.

1. $y'(x) + 2xy(x) = \cos(x)e^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $y'(x) + y(x)\tan(x) = \sin(2x)$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. $(1+x^2)y'(x) + xy(x) = 2x$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $2xy'(x) + y(x) = x^3$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5. On considère l'équation différentielle :

$$x(x-1)y'(x) - (2x-1)y(x) + x^2 = 0. \quad (\star)$$

1. Résoudre $(\star)$ sur $]0, 1[$.
2. Résoudre $(\star)$ sur $\mathbb{R}$.

♣ **Exercice 6.** On considère l'équation différentielle :

$$xy'(x) + (x-1)y(x) = e^{-x}. \quad (\star)$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation homogène associée à $(\star)$.
2. Chercher une solution particulière de l'équation $(\star)$ sous la forme $f_p(x) = \lambda e^{-x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre l'équation $(\star)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Trouver les solutions de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $y(0) = -1$ puis vérifiant $y(1) = 0$ et enfin vérifiant $y(0) = 1$.

5. Peut-on résoudre $(\star)$ sur $\mathbb{R}$?

2 Équations différentielles linéaires du second ordre

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = 0$.
2. $y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0$.
3. $4y''(t) + 4y'(t) + y(t) = 0$.
4. $y''(x) - 4y(x) = 0$.
5. $9y''(x) - 6y'(x) = 0$.
6. $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 0$ avec $y(0) = 1 = y'(0) = 1$.
7. $9y''(x) - 6y'(x) + y(x) = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
8. ♣ $2y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

Exercice 8.

1. Chercher une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y''(x) + y(x) = x$$
sous la forme $y_1(x) = ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer.
2. Chercher une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{2}e^{x}$$
sous la forme $y_2(x) = ae^{x}$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.
3. Chercher une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y''(x) + y(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$$
sous la forme $y_3(x) = ae^{-x}$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.
4. On pose $y_p = y_1 + y_2 + y_3$. Déterminer pour tout x dans $\mathbb{R}$, $y_p''(x) + y_p(x)$.
5. Résoudre l' équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}$
$$y''(x) + y(x) = x + \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$

Exercice 9. Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $y''(x) + y'(x) + y(x) = x$. *Indication : on pourra après justification chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = ax + b$ où a, b sont des constantes à déterminer.*
2. $y''(x) - y(x) = e^{2x}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$. *Indication : on pourra après justification chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = ae^{2x}$ où a est une constante à déterminer..*
3. $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = xe^{4x}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$. *Indication : on pourra après justification chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = (Ax + B)e^{4x}$ où A, B sont des constantes à déterminer..*
4. ♣ $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = x^2 e^{-2x}$. *Indication : on pourra après justification chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = P(x)e^{-2x}$ où P est un polynôme de degré 3.*
5. ♣ $y''(x)+y'(x)+y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ sachant que $y(0) = y'(0) = 1$. *Indication : on pourra après justification chercher une solution particulière sous la forme $y(x) = a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer..*

Exercice 10.

1. Résoudre l'équation différentielle :
$$y''(x) + y'(x) = 1 + x^2 \qquad (E_1)$$
en cherchant une solution particulière qui soit un polynôme du troisième degré.
2. On considère l'équation différentielle :
$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = (x^2 + 1)e^{-x}. \qquad (E_2).$$
Montrer que f est solution de (E_2) si et seulement si g est solution de (E_1) où g est défini par $g(x) = e^x f(x)$ pour tout x. Puis résoudre (E_2).

Exercice 11. ♣ A l'aide du changement de variable $z(x) = y(x^2)$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle
$$4xy''(x) + 2(1 + 2\sqrt{x})y'(x) - y(x) = 1.$$

Modélisation et équations différentielles non linéaires

Exercice 12. ♣ L'intensité $I(t)$ qui parcourt un circuit constitué d'une résistance R (ohms) et d'une auto-inductance L (henrys) vérifie l'équation différentielle $LI'(t) + RI(t) = E(t)$ où $E(t)$ désigne la *f.é.m* appliquée aux extrémités. Résoudre l'équation différentielle lorsque $E(t) = E_0$ constante, puis lorsque $E(t) = E_0 \sin(wt)$.

Exercice 13. On sait que l'accroissement d'une population donnée est proportionnelle à cette population. On sait de plus que cette population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 14. ♣ Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que le segment de chaque tangente compris entre le point de tangence et l'axe des abscisses est divisé en deux parties égales par le point d'intersection avec l'axe des ordonnées.

Exercice 15. On a observé, dans une région donnée, l'évolution d'une population de rongeurs soumis aux attaques d'un prédateur. On note $N(t)$ le nombre de centaines de rongeurs dans cette région à un instant t, exprimé en années. Pour un certain modèle, on peut montrer que la fonction N vérifie l'équation différentielle suivante :
$$N'(t) = 2N(t) - \frac{3}{2}\big(N(t)\big)^2,$$
avec, comme condition initiale, $N(0) = 1$.

1. Trouver une équation différentielle simple vérifiée par $h = \frac{1}{N}$.
2. Déterminer h puis N.
3. Comme se comporte la taille de la population de rongeurs lorsqu'on attend très longtemps ?

Exercice 16. Trouver toutes les applications dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = f(1-x).$$

Exercice 17. ♣ Soit l'équation différentielle (E) $y'(t) = y(t)(1-y(t))$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de C la fonction constante $y(t) = C$ est-elle solution de (E) ?
2. Trouver deux constantes A et B telles que $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{1-y}$.
3. En déduire une primitive de $\dfrac{y'(t)}{y(t)(1-y(t))}$ (pour toute fonction y définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$).
4. Résoudre l'équation différentielle (E).

Exercice 18. ♣ Dans cet exercice, on se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$(1-x^2)\big(f(x)\big)^2 = xf'(x) + f(x). \tag{1}$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$xy'(x) + 1 = y(x) + x^2. \tag{2}$$
2. On considère f une solution strictement positive de l'équation (1) et on pose $u(x) = \frac{1}{f(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que u est solution de l'équation (2).
3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (1).