

Chapitre 2

Théorie des modules effectifs Approximations de Voigt et de Reuss

Dans ce chapitre les éléments constitutifs du milieu hétérogène sont supposés élastiques linéaires et parfaitement collés. Aucune hypothèse n'est faite sur le degré d'isotropie ou d'anisotropie de leurs tenseurs d'élasticité. Nous présentons dans ce contexte la théorie des modules effectifs puis les approximations de Voigt et de Reuss. Les éléments de base de la méthodologie à mettre en oeuvre sont supposés acquis au chapitre 1.

2.1. Théorie des modules effectifs

2.1.1. Localisation

Désignons par $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ les coordonnées d'un point courant dans le volume élémentaire représentatif V . Sauf cas particuliers (milieux poreux, microfissurés ou avec un constituant rigide) que nous excluons dans ce chapitre pour simplifier la présentation, nous avons vu que contraintes et déformations macroscopiques peuvent être obtenues en moyennant dans V les contraintes et déformations locales :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{|V|} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle. \quad (2.1)$$

¹Chapitre rédigé par Jean-Claude MICHEL.
In Michel BORNERT, Thierry BRETHERAU et Pierre GILORMINI (eds) Homogénéisation en Mécanique des Matériaux 1, Hermes Science Publications, 2001, chap. 2, pp. 41-56.

Le processus inverse dit localisation est plus complexe : étant donné un état de contraintes macroscopiques $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ (resp. un état de déformations macroscopiques $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$), il s'agit de déterminer le champ de contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (resp. le champ de déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$) qui lui correspond dans V . On sait que la détermination des champs locaux doit se faire en tenant compte des équations d'équilibre et de comportement. On aurait donc à résoudre

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad \text{dans } V, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^d, \quad (2.2)$$

ou

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \quad \text{dans } V, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^d, \quad (2.3)$$

selon que la localisation s'effectue à contraintes ou à déformations macroscopiques données (l'exposant "d" sur $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ou $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ signifie que la grandeur macroscopique est donnée). Ainsi formulés, les problèmes (2.2) et (2.3) sont des problèmes mal posés¹. Cela résulte de l'absence de véritables conditions aux limites locales au bord ∂V de V . Pour remédier à cette absence de conditions aux limites locales tout en restant compatible avec les conditions de moyenne globales à respecter sur $\boldsymbol{\sigma}$ ou $\boldsymbol{\varepsilon}$, la théorie des modules effectifs envisage les conditions dites de contraintes homogènes au bord et de déformations homogènes au bord.

Condition de contraintes homogènes au bord

Pour cette condition, on écrit

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \partial V, \quad (2.4)$$

avec $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ une contrainte homogène. Compte tenu des équations d'équilibre satisfaites par $\boldsymbol{\sigma}$ dans V , et par application de la formule de la divergence, on a

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \, d\mathbf{x} &= \int_V (\sigma_{ik} x_j)_{,k} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \sigma_{ik} x_j n_k \, ds = \\ &= \bar{\sigma}_{ik} \int_{\partial V} x_j n_k \, ds = \bar{\sigma}_{ik} \int_V x_{j,k} \, d\mathbf{x} = \\ &= \bar{\sigma}_{ij} |V|, \end{aligned} \quad (2.5)$$

c'est-à-dire l'égalité (2.1a). Ainsi, la condition de contraintes homogènes au bord est compatible avec la condition de moyenne sur les contraintes. Avec

¹Par problèmes mal posés on entend des problèmes dont la solution n'est pas unique.

cette condition de contraintes homogènes au bord, il est classique de formuler le problème local à $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ donné. (2.2) est transformé en

$$(P_{\text{CH}}) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \text{ dans } V, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \text{ sur } \partial V. \end{cases} \quad (2.6)$$

On obtient ainsi un problème avec conditions aux limites de type forces imposées dont la solution est unique en contraintes et en déformations.

Avec la condition de contraintes homogènes au bord, on peut aussi préférer travailler à partir de la donnée de $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Dans ce cas, c'est (2.3) qui sera transformé en

$$(P'_{\text{CH}}) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \text{ dans } V, \\ (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \text{ sur } \partial V, & \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{d}}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Egalement bien posé, ce problème est équivalent au précédent au sens suivant. Si $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ désignent les champs de contraintes et de déformations solutions de (P_{CH}) , et si $\boldsymbol{\sigma}'$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}')$ désignent ceux solutions de (P'_{CH}) lorsque $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{d}} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle$, alors $\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$, et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ pour tout \mathbf{x} dans V . Preuve : on peut par exemple appliquer le théorème des travaux virtuels aux différences $\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, et remarquer que le travail des efforts extérieurs y est nul. La définie positivité de \mathbf{C} permet ensuite de conclure.

Condition de déformations homogènes au bord

Pour cette condition, on écrit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} \text{ sur } \partial V, \quad (2.8)$$

avec $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ une déformation homogène. De par la définition du tenseur des déformations linéarisées $\boldsymbol{\varepsilon}$, et par utilisation de la formule de Green, on a

$$\begin{aligned} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{2} \int_V (u_{i,j} + u_{j,i}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) \, ds = \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_{ik} \int_{\partial V} x_k n_j \, ds + \bar{\varepsilon}_{jk} \int_{\partial V} x_k n_i \, ds) = \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_{ij} |V| + \bar{\varepsilon}_{ji} |V|) = \\ &= \bar{\varepsilon}_{ij} |V|, \end{aligned} \quad (2.9)$$

et par suite l'égalité (2.1b). Ainsi, la condition de déformations homogènes au bord est compatible avec la condition de moyenne sur les déformations. Le plus simple est ici de considérer que la déformation macroscopique est donnée. Il en résulte le problème local bien posé

$$(P_{\text{DH}}) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \text{ dans } V, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{d}} \cdot \mathbf{x} \text{ sur } \partial V. \end{cases} \quad (2.10)$$

Mais à nouveau il est possible de travailler à variable duale imposée. $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ étant donné, le problème s'écrit

$$(P'_{\text{DH}}) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = 0, & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) \text{ dans } V, \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ sur } \partial V, & \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{d}}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Un résultat d'équivalence analogue à celui montré pour les problèmes (P_{CH}) et (P'_{CH}) peut être donné pour les problèmes (P_{DH}) et (P'_{DH}) . Il n'en va pas de même en général en ce qui concerne l'équivalence entre les problèmes (P'_{CH}) et (P_{DH}) , ou (P_{CH}) et (P'_{DH}) . Prenons pour exemple ces deux derniers problèmes. Si on impose $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{d}} \cdot \mathbf{n}$ au bord ∂V , alors, d'après (2.5), on aura $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\text{d}}$. Mais, à cause de la présence d'hétérogénéités dans V , les déplacements qui en résultent ne seront pas affines sur ∂V . Ainsi, les solutions de (P_{CH}) et (P'_{DH}) seront en général différentes. Comme illustré au paragraphe 2.1.5, de tels problèmes se justifient néanmoins dans l'hypothèse d'un VÉR grand par rapport à la taille des hétérogénéités.

Tenseurs de localisation et de concentration

Les problèmes que nous venons de présenter sont des problèmes linéaires. Il y a donc correspondance linéaire entre la donnée et la solution de ces problèmes. Considérons pour commencer le problème (P_{DH}) dont la donnée est $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. On écrira cette correspondance sous la forme

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = A_{ijkl}(\mathbf{x}) \bar{\varepsilon}_{kh}, \quad (2.12)$$

où les A_{ijkl} sont les composantes d'un tenseur du quatrième ordre \mathbf{A} . \mathbf{A} est le tenseur de localisation des déformations associé à (P_{DH}) . L'interprétation de ses composantes est la suivante. Introduisons les tenseurs du second ordre \mathbf{i}^{kh} définis par

$$i_{ij}^{kh} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jh} + \delta_{ih}\delta_{jk}), \quad (2.13)$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. On peut écrire

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}_{kh} \mathbf{i}^{kh}. \quad (2.14)$$

Notons \mathbf{u}^{kh} la solution en déplacements de (P_{DH}) lorsque $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{i}^{kh}$. En vertu de la linéarité et de l'égalité (2.14), il vient

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{kh}(\mathbf{x})) \bar{\varepsilon}_{kh}, \quad (2.15)$$

et par comparaison avec (2.12), on a

$$A_{ijkl}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^{kh}(\mathbf{x})). \quad (2.16)$$

Ainsi, la composante A_{ijkh} de \mathbf{A} sera la composante “ ij ” de la déformation solution de (P_{DH}) lorsque la déformation macroscopique imposée est \mathbf{i}^{kh} . De par les symétries $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ et $\mathbf{i}^{kh} = \mathbf{i}^{hk}$, on a

$$A_{ijkh}(\mathbf{x}) = A_{jikh}(\mathbf{x}) = A_{jihk}(\mathbf{x}). \quad (2.17)$$

Prenant la moyenne dans V de (2.16) et utilisant (2.9) on notera aussi que

$$\langle A_{ijkh} \rangle = \mathbf{i}_{ij}^{kh}. \quad (2.18)$$

Pour le problème (P_{CH}) dont la donnée est $\bar{\sigma}$, on écrit de manière similaire

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = B_{ijkh}(\mathbf{x}) \bar{\sigma}_{kh}, \quad (2.19)$$

où les B_{ijkh} sont les composantes d’un tenseur du quatrième ordre \mathbf{B} . \mathbf{B} est le tenseur de concentration des contraintes associé à (P_{CH}) . L’interprétation de ses composantes est analogue à celle donnée pour les composantes de \mathbf{A} : B_{ijkh} est la composante “ ij ” de la contrainte solution de (P_{CH}) lorsque la contrainte macroscopique imposée est \mathbf{i}^{kh} . \mathbf{B} a les propriétés de symétrie et de moyenne de \mathbf{A} :

$$B_{ijkh}(\mathbf{x}) = B_{jikh}(\mathbf{x}) = B_{jihk}(\mathbf{x}), \quad \langle B_{ijkh} \rangle = \mathbf{i}_{ij}^{kh}. \quad (2.20)$$

Désignons par \mathbf{B}^{DH} le tenseur de concentration des contraintes associé à (P'_{DH}) et par \mathbf{A}^{CH} le tenseur de localisation des déformations associé à (P'_{CH}) . Les exposants “DH” et “CH” rappellent la condition homogène au bord dont ils sont issus. Compte tenu des équivalences mentionnées précédemment entre les problèmes (P_{DH}) et (P'_{DH}) d’une part, et (P_{CH}) et (P'_{CH}) d’autre part, on a

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = B_{ijkh}^{DH}(\mathbf{x}) \langle \sigma_{kh} \rangle, \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = A_{ijkh}^{CH}(\mathbf{x}) \langle \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}) \rangle, \quad (2.21)$$

si σ désigne le champ de contraintes solution de (P_{DH}) , et $\varepsilon(\mathbf{u})$ le champ de déformations solution de (P_{CH}) .

2.1.2. Définition des tenseurs effectifs

(D1) : σ et \mathbf{u} étant solution du problème (P_{DH}) , on appelle tenseur des modules effectifs et on note $\tilde{\mathbf{C}}$ le tenseur qui relie la moyenne dans V de ε à la moyenne dans V de σ . Soit en définissant $\bar{\sigma}$ par la relation (2.1a)

$$\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle = \tilde{\mathbf{C}} : \langle \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle = \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\varepsilon}. \quad (2.22)$$

(D2) : σ et \mathbf{u} étant solution du problème (P_{CH}) , on appelle tenseur des souplesses effectives et on note $\tilde{\mathbf{S}}$ le tenseur qui relie la moyenne dans V de σ à la moyenne dans V de ε . Soit en définissant $\bar{\varepsilon}$ par la relation (2.1b)

$$\bar{\varepsilon} = \langle \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle = \tilde{\mathbf{S}} : \langle \sigma \rangle = \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\sigma}. \quad (2.23)$$

Partant des équations locales de comportement et considérant la relation de localisation en déformations (2.12), on obtient

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijpq}(\mathbf{x}) \varepsilon_{pq}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = C_{ijpq}(\mathbf{x}) A_{pqkh}(\mathbf{x}) \bar{\varepsilon}_{kh}, \quad (2.24)$$

ce qui donne en moyennant dans V

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \langle C_{ijpq} A_{pqkh} \rangle \bar{\varepsilon}_{kh}, \quad (2.25)$$

et par la définition (D1)

$$\tilde{C}_{ijkh} = \langle C_{ijpq} A_{pqkh} \rangle, \quad (2.26)$$

c'est-à-dire en notation tensorielle

$$\tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C} : \mathbf{A} \rangle. \quad (2.27)$$

Le tenseur des modules effectifs est donc égal à la moyenne dans V du tenseur des modules des constituants pondéré par le tenseur de localisation des déformations \mathbf{A} . De la même manière, considérant la relation (2.19) et la définition (D2), on obtient

$$\tilde{S}_{ijkh} = \langle S_{ijpq} B_{pqkh} \rangle, \quad (2.28)$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\mathbf{S}} = \langle \mathbf{S} : \mathbf{B} \rangle, \quad (2.29)$$

de sorte que le tenseur des souplesses effectives est égal à la moyenne dans V du tenseur des souplesses des constituants pondéré par le tenseur de concentration des contraintes \mathbf{B} .

Symétries des tenseurs effectifs. Des symétries de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{S} , on déduit

$$\tilde{C}_{ijkh} = \tilde{C}_{jikh} = \tilde{C}_{jihk}, \quad \tilde{S}_{ijkh} = \tilde{S}_{jikh} = \tilde{S}_{jihk}. \quad (2.30)$$

La vérification de la symétrie par rapport aux couples “ ij ” et “ kh ” nécessite une caractérisation énergétique des tenseurs effectifs.

2.1.3. Caractérisation énergétique

Commençons par rappeler un résultat important dû à Hill.

Théorème de Hill : Soient $\boldsymbol{\tau}$ un champ de contraintes vérifiant $\text{div}(\boldsymbol{\tau}) = 0$ dans V , et \mathbf{v} un champ de déplacements définis dans V . Si $\boldsymbol{\tau}$ vérifie de plus $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \cdot \mathbf{n}$ sur ∂V , ou si \mathbf{v} vérifie $\mathbf{v} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle \cdot \mathbf{x}$ sur ∂V , alors

$$\langle \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle. \quad (2.31)$$

L'utilisation de ce théorème permet d'établir, pour les composantes de $\tilde{\mathbf{C}}$, les expressions énergétiques suivantes

$$\tilde{C}_{ijkh} = \langle C_{pqrs} A_{rskh} A_{pqij} \rangle. \quad (2.32)$$

En effet, d'après (2.16), A_{pqij} est la composante "pq" de la déformation $\varepsilon(\mathbf{u}^{ij})$ induite par $\mathbf{u}^{ij} = \mathbf{i}^{ij} \cdot \mathbf{x} = \langle \varepsilon(\mathbf{u}^{ij}) \rangle \cdot \mathbf{x}$ sur ∂V . Par ailleurs, $C_{pqrs} A_{rskh}$ est la composante "pq" de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{kh} = \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{u}^{kh})$, de sorte que $\boldsymbol{\sigma}^{kh}$ est à divergence nulle dans V . Ainsi, on est en droit d'appliquer le théorème de Hill au couple $(\boldsymbol{\sigma}^{kh}, \mathbf{u}^{ij})$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle C_{pqrs} A_{rskh} A_{pqij} \rangle &= \langle \sigma_{pq}^{kh} \varepsilon_{pq}(\mathbf{u}^{ij}) \rangle = \langle \sigma_{pq}^{kh} \rangle \langle \varepsilon_{pq}(\mathbf{u}^{ij}) \rangle = \\ &= \langle \sigma_{pq}^{kh} \rangle i_{pq}^{ij} = \langle \sigma_{ij}^{kh} \rangle = \langle C_{ijpq} A_{pqkh} \rangle = \\ &= \tilde{C}_{ijkh}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

La symétrie $\tilde{C}_{ijkh} = \tilde{C}_{khij}$ résulte de (2.32) et de la symétrie $C_{pqrs} = C_{rspq}$.

Un raisonnement analogue sur les B_{ijkh} conduit à

$$\tilde{S}_{ijkh} = \langle S_{pqrs} B_{rskh} B_{pqij} \rangle, \quad (2.34)$$

avec $\tilde{S}_{ijkh} = \tilde{S}_{khij}$.

Notons $\tilde{\mathbf{S}}'$ l'inverse de $\tilde{\mathbf{C}}$, et $\tilde{\mathbf{C}}'$ l'inverse de $\tilde{\mathbf{S}}$. Il est clair, d'après (2.21), que l'on a

$$\tilde{S}'_{ijkh} = \langle S_{pqrs} B_{rskh}^{\text{DH}} B_{pqij}^{\text{DH}} \rangle, \quad \tilde{C}'_{ijkh} = \langle C_{pqrs} A_{rskh}^{\text{CH}} A_{pqij}^{\text{CH}} \rangle. \quad (2.35)$$

2.1.4. Propriétés variationnelles

Commençons par rappeler les principes de minimum établis en élasticité linéaire.

Principe de minimum en déplacements : Parmi tous les champs de déplacements \mathbf{v} cinématiquement admissibles pour un problème donné, le champ de déplacements solution est celui qui minimise la fonctionnelle

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{C} : \varepsilon(\mathbf{v}) : \varepsilon(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x} - L(\mathbf{v}), \quad (2.36)$$

où $L(\mathbf{v})$ désigne le travail des efforts extérieurs donnés dans le champ de déplacements \mathbf{v} .

Principe de minimum en contraintes : Parmi tous les champs de contraintes $\boldsymbol{\tau}$ statiquement admissibles pour un problème donné, le champ de contraintes solution est celui qui minimise la fonctionnelle

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{S} : \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \, d\mathbf{x} - L^*(\boldsymbol{\tau}), \quad (2.37)$$

où $L^*(\boldsymbol{\tau})$ désigne le travail des déplacements donnés dans le champ de contraintes $\boldsymbol{\tau}$.

Pour les champs $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{u} solution du problème, il est connu aussi (formule de Clapeyron) que

$$\int_V \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} = \int_V \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \, d\mathbf{x} = L(\mathbf{u}) + L^*(\boldsymbol{\sigma}). \quad (2.38)$$

Il est commode pour la suite d'introduire les ensembles suivants

$$\mathcal{S}^0 = \{\boldsymbol{\tau} \text{ symétrique et régulier dans } V, \text{ tel que } \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \text{ dans } V\},$$

$$\mathcal{S}'(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \{\boldsymbol{\tau} \text{ dans } \mathcal{S}^0, \text{ tel que } \langle \boldsymbol{\tau} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}\},$$

$$\mathcal{S}'_{\text{CH}} = \{\boldsymbol{\tau} \text{ dans } \mathcal{S}^0, \text{ tel que } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial V\},$$

$$\mathcal{S}_{\text{CH}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \{\boldsymbol{\tau} \text{ dans } \mathcal{S}^0, \text{ tel que } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} \text{ sur } \partial V\},$$

$$\mathcal{U}^0 = \{\mathbf{v} \text{ régulier dans } V\},$$

$$\mathcal{U}'(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \{\mathbf{v} \text{ dans } \mathcal{U}^0, \text{ tel que } \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\},$$

$$\mathcal{U}'_{\text{DH}} = \{\mathbf{v} \text{ dans } \mathcal{U}^0, \text{ tel que } \mathbf{v} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle \cdot \mathbf{x} \text{ sur } \partial V\},$$

$$\mathcal{U}_{\text{DH}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \{\mathbf{v} \text{ dans } \mathcal{U}^0, \text{ tel que } \mathbf{v} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} \text{ sur } \partial V\}. \quad (2.39)$$

Considérons, à titre d'exemple, le problème (P_{DH}) . Pour ce problème (à déplacements imposés), on a $L(\mathbf{u})=L(\mathbf{v})=0$, et le principe de minimum en déplacements entraîne

$$\langle \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle \leq \langle \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle, \quad (2.40)$$

pour tout \mathbf{v} dans $\mathcal{U}_{\text{DH}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$. Mais, \mathbf{u} désignant le champ de déplacements solution de (P_{DH}) , on a par ailleurs

$$\langle \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (2.41)$$

En reportant cette dernière égalité dans (2.40) et en notant $w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))$ l'énergie élastique de déformations dans le déplacement \mathbf{v} , c'est-à-dire

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) = \frac{1}{2} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \quad (2.42)$$

on obtient

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}_{\text{DH}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})} \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle. \quad (2.43)$$

Utilisons maintenant le principe de minimum en contraintes. Pour le problème considéré, on a $L^*(\boldsymbol{\tau}) = |V| \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, et $L^*(\boldsymbol{\sigma}) = |V| \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, d'où

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \rangle - \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq \frac{1}{2} \langle \mathbf{S} : \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} \rangle - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.44)$$

pour tout $\boldsymbol{\tau}$ dans \mathcal{S}^0 . Mais, compte tenu de (2.38) et (2.22), le membre de gauche de (2.44) vaut $-\tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}/2$. Il en résulte

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = - \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}^0} [\langle w^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle - \langle \boldsymbol{\tau} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}], \quad (2.45)$$

en notant $w^*(\boldsymbol{\tau})$ l'énergie élastique de contraintes $\boldsymbol{\tau}$,

$$w^*(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau}. \quad (2.46)$$

Il existe donc au moins deux façons différentes mais équivalentes de caractériser de façon variationnelle le tenseur des modules effectifs $\tilde{\mathbf{C}}$. D'un point de vue numérique, (2.45) n'est pas facile à mettre en oeuvre dans un code de calcul par éléments finis en déplacements et on préférera utiliser (2.43). D'un point de vue théorique, si l'on connaît des champs admissibles, (2.43) et (2.45) donnent le moyen d'aboutir à des estimations par excès et par défaut de $\tilde{\mathbf{C}}$.

Les mêmes remarques peuvent être faites à propos du tenseur des souplesses effectives $\tilde{\mathbf{S}}$ qui satisfait

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{CH}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})} \langle w^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle = - \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}^0} [\langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle - \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle]. \quad (2.47)$$

De la même manière, on obtient pour $\tilde{\mathbf{S}}'$ (l'inverse de $\tilde{\mathbf{C}}$)

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{S}}' : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}'(\bar{\boldsymbol{\sigma}})} \langle w^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle = - \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}'_{\text{DH}}} [\langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle - \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle], \quad (2.48)$$

et pour $\tilde{\mathbf{C}}'$ (l'inverse de $\tilde{\mathbf{S}}$)

$$\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{C}}' : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{U}'(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})} \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle = - \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}'_{\text{CH}}} [\langle w^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle - \langle \boldsymbol{\tau} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle]. \quad (2.49)$$

Les propriétés (2.43) et (2.49a) donnent le moyen de comparer $\tilde{\mathbf{C}}$ et $\tilde{\mathbf{C}}'$. En effet, $\mathcal{U}_{\text{DH}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ étant inclus dans $\mathcal{U}'(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$, on obtient

$$\tilde{\mathbf{C}}' : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq \tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.50)$$

pour tout $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ symétrique. De même, $\mathcal{S}_{\text{CH}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$ étant inclus dans $\mathcal{S}'(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$, on déduit de (2.47a) et (2.48a)

$$\tilde{\mathbf{S}}' : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \leq \tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.51)$$

pour tout $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ symétrique. Ces inégalités montrent que les tenseurs effectifs dépendent en toute rigueur de la condition homogène au bord choisie pour les obtenir. Le tenseur des modules (resp. des souplesses) est plus “raide” (resp. plus “souple”) dans le cas homogène en déformations que dans le cas homogène en contraintes. A condition de considérer un VER grand par rapport à la taille des hétérogénéités, nous allons voir sur un exemple que les deux types de conditions aux limites conduisent néanmoins à des résultats voisins.

2.1.5. Exemple illustrant l'influence des conditions aux limites

L'exemple concerne un composite à matrice homogène isotrope renforcée par des fibres longues unidirectionnelles également homogènes isotropes. Les modules d'Young et coefficients de Poisson sont

$$E_m = 70 \text{ GPa}, \quad \nu_m = 0.3, \quad (2.52)$$

pour la matrice et

$$E_f = 420 \text{ GPa}, \quad \nu_f = 0.2, \quad (2.53)$$

pour les fibres. La fraction volumique de fibres est fixée à 0.385. Les fibres sont circulaires et régulièrement réparties en carré dans leur plan transverse (Figure 2.1). Compte tenu des symétries géométriques et matérielles présentes dans cet arrangement, le composite est à symétrie carrée (paragraphe 5.2.1 du tome 2), et, en rapportant à x_3 l'axe commun des fibres, son tenseur des modules peut être écrit sous la forme matricielle (5.22) du tome 2. On s'intéresse dans la suite à comparer les modules de rigidité au cisaillement plan $\tilde{\mu}^t$ et $\tilde{\mu}^{t'}$ définis par

$$\tilde{\mu}^t = \tilde{C}_{66}, \quad \tilde{\mu}^{t'} = \tilde{C}'_{66}, \quad (2.54)$$

ainsi que les modules de rigidité à la compression plane \tilde{k}^p et $\tilde{k}^{p'}$ définis par

$$\tilde{k}^p = \frac{1}{2}(\tilde{C}_{11} + \tilde{C}_{12}), \quad \tilde{k}^{p'} = \frac{1}{2}(\tilde{C}'_{11} + \tilde{C}'_{12}). \quad (2.55)$$

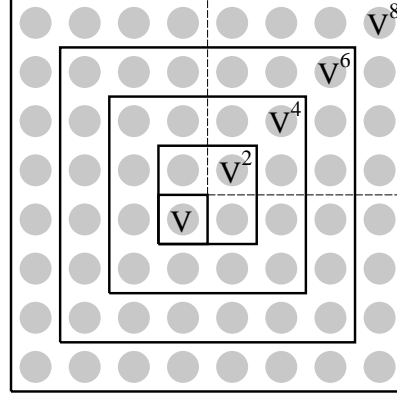


Figure 2.1. Composite à fibres longues. Répartition en carré. Volumes élémentaires considérés pour l'étude de l'influence des conditions aux limites. Coupe transversale. V^m contient $m \times m$ fibres.

Volumes élémentaires

Cinq volumes élémentaires ont été considérés (Figure 2.1). Le premier, noté V , correspond à la cellule unitaire contenant en son centre une unique fibre. Les quatre autres, notés V^m avec $m=2, 4, 6$ et 8 , sont des multiples de cette cellule : V^m contient $m \times m$ fibres réparties en carré.

Calcul des modules

Les modules ont été calculés en résolvant les problèmes (2.6) et (2.10) dans l'hypothèse de déformations planes. Les conditions aux limites considérées sont

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} &= i_{\alpha\beta}^{12} n_{\beta} && \text{pour le calcul de } \tilde{\mu}^{t'}, \\
 u_{\alpha} &= i_{\alpha\beta}^{12} x_{\beta} && \text{pour le calcul de } \tilde{\mu}^t, \\
 \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta} &= i_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma} n_{\beta} && \text{pour le calcul de } \tilde{k}^{p'}, \\
 u_{\alpha} &= i_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma} x_{\beta} && \text{pour le calcul de } \tilde{k}^p,
 \end{aligned}$$

où les indices α, β, γ prennent les valeurs 1 et 2.

La résolution a été effectuée par éléments finis en ne considérant, compte tenu des symétries, qu'un quart de section des volumes élémentaires. La Figure 2.2 résume les maillages utilisés. En supposant que les volumes élémentaires sont centrés à l'origine et en notant \mathbf{t} le vecteur contrainte, les conditions de

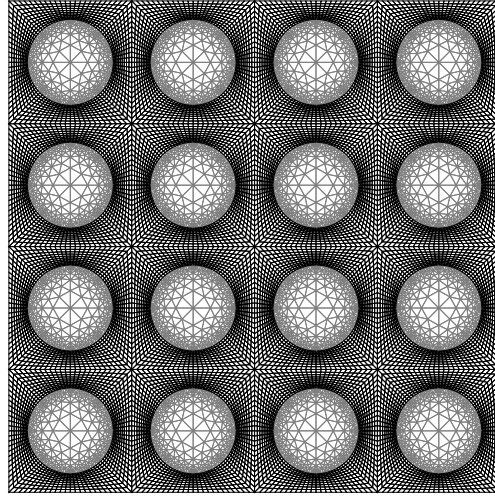


Figure 2.2. *Maillage des quarts de section des volumes élémentaires considérés pour l'étude de l'influence des conditions aux limites. Maillage en éléments finis Q4 pour la matrice et T3 pour les fibres.*

symétrie s'écrivent

$$u_\alpha(x_1, 0) = u_\beta(0, x_2) = 0, \quad t_\beta(x_1, 0) = t_\alpha(0, x_2) = 0, \quad (2.56)$$

avec $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ pour le calcul de $\tilde{\mu}^t$ et $\tilde{\mu}^{t'}$, et $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ pour le calcul de \tilde{k}^p et $\tilde{k}^{p'}$.

Résultats

Les résultats obtenus sont présentés dans la Figure 2.3 où l'évolution des modules est montrée en fonction du rapport $1/m$. On notera en premier que l'inégalité (2.50) y est bien toujours vérifiée. Si on compare les résultats issus de la cellule unitaire, l'écart entre les modules de rigidité à la compression plane est de l'ordre de 1.5% mais l'écart entre les modules de rigidité au cisaillement plan est supérieur à 10%. D'autres résultats non figurés ici montrent que ces écarts peuvent atteindre 16 et 40% lorsque les fibres sont placées aux sommets de la cellule. La théorie des modules effectifs n'est donc pas satisfaisante dans le cas d'un petit VER. Au cas considéré (constituants compressibles, contraste de

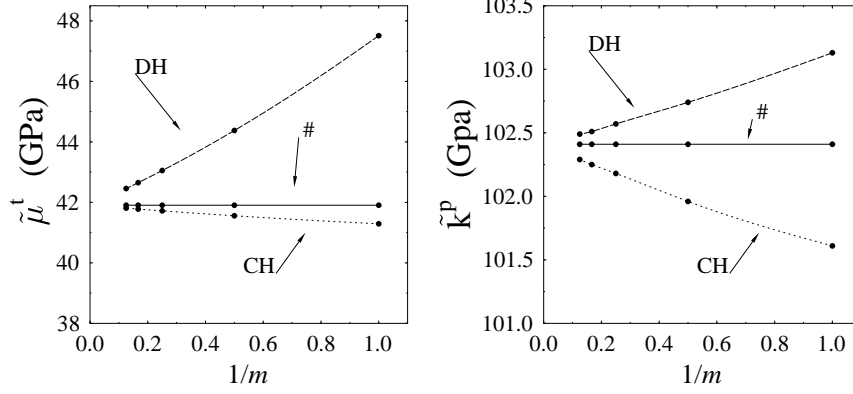


Figure 2.3. Variation des modules en fonction du rapport $1/m$. DH : calcul avec la condition de déformations homogènes au bord. # : calcul en déformations périodiques. CH : calcul avec la condition de contraintes homogènes au bord.

6 sur les modules d'Young) on note néanmoins que la convergence des modules est rapide : pour le VER à 64 fibres ($1/m=0.125$ dans la figure) l'écart entre les modules de rigidité au cisaillement plan n'est plus que de l'ordre de 1.5% et l'écart entre les modules de rigidité à la compression plane est inférieur à 0.2%. Dans ce dernier cas de VER et pour une même contrainte globale de cisaillement, la Figure 2.4 permet de comparer les déformations locales calculées à partir des deux types de conditions aux limites. Il est visible dans cette figure que les déformations ne diffèrent de manière sensible que dans un voisinage du bord où sont imposées les conditions aux limites.

Remarque : Pour le type de composite considéré ici (périodique), on peut montrer (voir par exemple Suquet [SUQ 82]) que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{C}_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \tilde{C}'_m = \tilde{C}^\#, \quad (2.57)$$

où $\tilde{C}^\#$ désigne le tenseur des modules issu de la théorie d'homogénéisation périodique. Comme l'indique la Figure 2.3, les modules issus de cette théorie ne dépendent pas de la taille du VER. Cette théorie sera exposée au chapitre suivant.

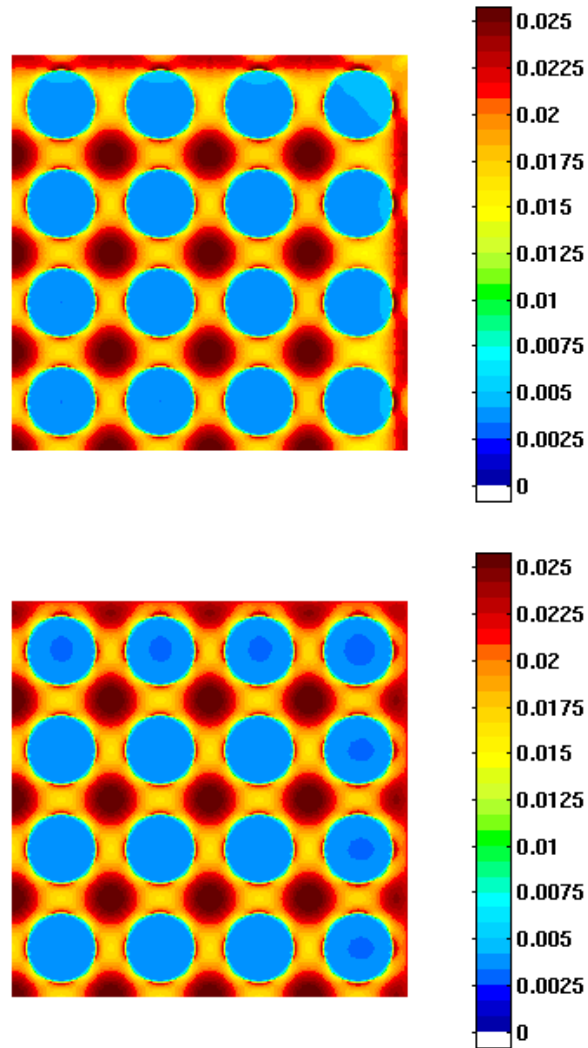


Figure 2.4. *Cartes de la déformation équivalente dans le quart de section du VER à 64 fibres. En haut : cas du cisaillement avec condition de déformations homogènes au bord. En bas : cas du cisaillement avec condition de contraintes homogènes au bord.*

2.2. Approximations de Voigt et de Reuss

2.2.1. Approximation de Voigt

L'approximation de Voigt consiste à supposer que les déformations sont *uniformes* dans V . Il en résulte d'après (2.12) $A_{ijkh}(\mathbf{x}) = i_{ij}^{kh}$ pour tout \mathbf{x} dans V , et, en reportant dans (2.26), le tenseur des modules effectifs sera approché par

$$\mathbf{C}^V = \langle \mathbf{C} \rangle. \quad (2.58)$$

Rares sont les cas où cette approximation donne de bons résultats (cela se comprend à la vue de la Figure 2.4). Utilisant la propriété variationnelle (2.43) et choisissant pour élément \mathbf{v} de $\mathcal{U}_{\text{DH}}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ le champ particulier $\mathbf{v} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x}$ partout dans V , on obtient

$$\tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq \mathbf{C}^V : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.59)$$

pour tout $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ symétrique. Le tenseur des modules de Voigt est donc une *estimation par excès* du tenseur des modules effectifs. Compte tenu de (2.50), notons que l'inégalité (2.59) tient aussi pour $\tilde{\mathbf{C}}'$ l'inverse de $\tilde{\mathbf{S}}$.

2.2.2. Approximation de Reuss

Dans un point de vue dual du précédent, l'approximation de Reuss consiste à supposer que les contraintes sont uniformes dans V . Cette approximation entraîne $B_{ijkh}(\mathbf{x}) = i_{ij}^{kh}$ pour tout \mathbf{x} dans V , et, en reportant dans (2.28), le tenseur des souplesses effectives sera approché par

$$\mathbf{S}^R = \langle \mathbf{S} \rangle. \quad (2.60)$$

Le tenseur des souplesses de Reuss \mathbf{S}^R est une estimation par excès de $\tilde{\mathbf{S}}$:

$$\tilde{\mathbf{S}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \leq \mathbf{S}^R : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (2.61)$$

pour tout $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ symétrique. Cela résulte de l'égalité (2.47a) en choisissant pour champ $\boldsymbol{\tau}$ appartenant à $\mathcal{S}_{\text{CH}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})$ le champ de contraintes particulier $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ partout dans V . On a aussi, compte tenu de (2.51), $\tilde{\mathbf{S}}' : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \leq \mathbf{S}^R : \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ pour tout $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ symétrique.

2.2.3. Exemple

On reprend l'exemple du composite à fibres longues unidirectionnelles du paragraphe 2.1.5. Fibres et matrice étant isotropes, \mathbf{C}^V et \mathbf{S}^R le seront également. Ainsi les approximations de Voigt et de Reuss ne tiennent pas compte de

l'anisotropie globale due à l'arrangement des fibres. L'objet de ce paragraphe est de montrer qu'il est néanmoins possible d'en déduire des estimations par défaut et par excès des modules considérés précédemment. On se place dans l'hypothèse d'un grand VER et on suppose pour simplifier $\tilde{\mu}^t = \tilde{\mu}^{t'}$, $\tilde{k}^p = \tilde{k}^{p'}$.

Champs admissibles

Les inégalités (2.59) et (2.61) ont été établies dans le cas général, c'est-à-dire pour des problèmes tridimensionnels, mais les problèmes auxquels on s'intéresse ici sont bidimensionnels de déformations planes. Il convient de modifier la définition des ensembles $\mathcal{U}_{\text{DH}}(\bar{\varepsilon}_2)$ et $\mathcal{S}_{\text{CH}}(\bar{\sigma}_2)$ pour en tenir compte :

$$\mathcal{U}_{\text{DH}}(\bar{\varepsilon}_2) = \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_2(\mathbf{x}_2) \text{ dans } V, \mathbf{v}_2 \text{ régulier dans } V_2, \text{ tel que } \mathbf{v}_2 = \bar{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{x}_2 \text{ sur } \partial V_2 \}, \quad (2.62)$$

et, compte tenu de l'isotropie des constituants,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{CH}}(\bar{\sigma}_2) = \{ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_2(\mathbf{x}_2) + \nu(\mathbf{x}_2) \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_2(\mathbf{x}_2)) \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \text{ dans } V, \\ \boldsymbol{\tau}_2 \text{ symétrique et régulier dans } V_2, \text{ tel que} \\ \text{div}_2(\boldsymbol{\tau}_2) = 0 \text{ dans } V_2, \boldsymbol{\tau}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \bar{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \text{ sur } \partial V_2 \}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

L'indice "2" indique la restriction bidimensionnelle : $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta$ avec $\alpha, \beta=1,2$, $\mathbf{v}_2 = v_\alpha \mathbf{e}_\alpha$ avec $\alpha=1,2$, V_2 est la coupe de V dans un plan orthogonal à la direction des fibres, etc.

Encadrement du module de rigidité au cisaillement plan

Soient \mathbf{v} un élément quelconque de $\mathcal{U}_{\text{DH}}(\mathbf{i}_2^{12})$ et $\boldsymbol{\tau}$ un élément quelconque de $\mathcal{S}_{\text{CH}}(\mathbf{i}_2^{12})$, on a

$$1/(8\langle w^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle) \leq \tilde{\mu}^t \leq 2\langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle, \quad (2.64)$$

avec les expressions

$$w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})))^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \quad w^*(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1+\nu}{2E} \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau} - \frac{\nu}{E} (\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))^2. \quad (2.65)$$

Conformément aux approximations de Voigt et de Reuss, on peut choisir $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_2(\mathbf{x}_2) = \mathbf{i}_2^{12} \cdot \mathbf{x}_2$ et $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\tau}_2(\mathbf{x}_2) = \mathbf{i}_2^{12}$ dans V . Les constituants étant homogènes, il vient

$$\frac{1}{\frac{c_f}{\mu_f} + \frac{c_m}{\mu_m}} \leq \tilde{\mu}^t \leq c_f \mu_f + c_m \mu_m, \quad (2.66)$$

où c_f désigne la fraction volumique de fibres et $c_m=1-c_f$ la fraction volumique de matrice. Le module de rigidité au cisaillement plan du composite doit donc être compris entre les moyennes harmonique et arithmétique du module de rigidité au cisaillement des constituants. Si on reprend les caractéristiques considérées au paragraphe 2.1.5 on obtient que $\tilde{\mu}^t$ doit être compris entre 39.93 et 83.93 GPa. La théorie des modules effectifs donne asymptotiquement $\tilde{\mu}^t \approx 41.90$ GPa.

Encadrement du module de rigidité à la compression plane

Pour ce module, on a

$$\frac{1}{2\langle w^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle} \leq \tilde{k}^p \leq \frac{\langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle}{2}, \quad (2.67)$$

pour tout \mathbf{v} dans $\mathcal{U}_{\text{DH}}(\mathbf{i}_2^{\alpha\alpha})$ et tout $\boldsymbol{\tau}$ dans $\mathcal{S}_{\text{CH}}(\mathbf{i}_2^{\alpha\alpha})$ ($\alpha=1,2$). Choissant cette fois $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_2(\mathbf{x}_2) = \mathbf{i}_2^{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{x}_2$, et $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{i}_2^{\alpha\alpha} + 2\nu(\mathbf{x}_2)\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$ dans V , on obtient

$$\frac{1}{\frac{c_f}{k_f^p} + \frac{c_m}{k_m^p}} \leq \tilde{k}^p \leq c_f k_f^p + c_m k_m^p, \quad (2.68)$$

ce qui donne \tilde{k}^p compris entre 95.63 et 153.7 GPa alors que \tilde{k}^p est voisin de 102.4 GPa. D'autres estimations, conduisant à des encadrements plus serrés, seront présentés par la suite.

Références

- [ABO 91] J. ABOUDI. *Mechanics of composite materials: a unified micromechanical approach*. Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [CHR 91] R.M. CHRISTENSEN. *Mechanics of composite materials*. Krieger, Malabar, 1991.
- [FRA 91] D. FRANÇOIS, A. PINEAU ET A. ZAOUI. *Comportement mécanique des matériaux*, volume 1. Hermès, Paris, 1991.
- [HAS 62] Z. HASHIN. The elastic moduli of heterogeneous materials. *J. Appl. Mech.*, 29:143–150, 1962.
- [HAS 83] Z. HASHIN. Analysis of composite materials: a survey. *J. Appl. Mech.*, 50:481–505, 1983.
- [HIL 67] R. HILL. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15:79–95, 1967.
- [LEN 84] F. LÉNÉ. *Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement*. Thèse de doctorat d'état, Université Paris 6, 1984.

- [SUQ 82] P. SUQUET. *Plasticité et homogénéisation*. Thèse de doctorat d'état, Université Paris 6, 1982.
- [WHI 90] J.M. WHITNEY AND R.L. MCCULLOUGH. *Micromechanical materials modeling*. Delaware composites design encyclopedia. Technomic, Lancaster, 1990.