

Chapitre 3

Composites à microstructure périodique

3.1. Introduction

Il y a plusieurs raisons de s'intéresser aux composites à microstructure périodique en complément de ceux à microstructure "aléatoire". La première raison est que cette périodicité se rencontre fréquemment dans les composites "artificiels" (faits par l'homme) et parfois dans certains composites naturels.

Une seconde raison est que les composites périodiques se prêtent bien aux calculs numériques, sur des volumes élémentaires finis (par opposition aux problèmes d'inclusions en milieu infini) avec des conditions aux limites bien posées. Voici quelques points de repère pour ces approches numériques : Adams et Donner (1967, [ADA 67]), Needleman (1972, [NEE 72]) Bourgat (1977, [BOU 77]), Marigo *et al.* (1987, [MAR 87]), Devries *et al.* (1989, [DEV 89]), Bendsoe et Kikuchi (1988, [BEN 88]), Guedes et Kikuchi (1990, [GUE 90]) et les références de ces travaux. Initialement développées sur des microstructures simples (typiquement une fibre circulaire dans une cellule carrée) ces méthodes peuvent maintenant s'appliquer à des microstructures plus complexes (plusieurs centaines d'inclusions) grâce à l'accroissement de la puissance de calcul disponible (voir Brockenborough, Suresh et Wienecke [BRO 91], Moulinec et Suquet [MOU 95] [MOU 98] par exemple).

Une troisième raison, importante sur le plan fondamental, est que les milieux périodiques permettent de définir avec rigueur la notion de comportement homogénéisé (voir par exemple Sanchez-Palencia [SAN 74] [SAN 80], Tartar [TAR 77], Bensoussan, Lions et Papanicolaou [BEN 78]). Schématiquement ces

¹Chapitre rédigé par Jean-Claude MICHEL, Hervé MOULINEC et Pierre SUQUET.
In Michel BORNERT, Thierry BRETHERAU et Pierre GILORMINI (eds) Homogénéisation en Mécanique des Matériaux 1, Hermes Science Publications, 2001, chap. 3, pp. 57-94.

travaux considèrent le rapport entre la taille des inclusions et une longueur macroscopique comme un petit paramètre. Les équations homogénéisées sont les équations obtenues à la limite lorsque ce rapport tend vers 0. Ces théories précisent la notion de milieu homogène équivalent ainsi que les notions de correcteurs du premier ordre (les seuls considérés ici) mais aussi d'ordre supérieur. Mentionnons à titre d'exemple qu'on peut obtenir des effets des gradients d'ordre supérieur en considérant les correcteurs d'ordre 2 et suivants.

3.2. Notions spécifiques aux microstructures périodiques

3.2.1. Cellule de base

Un milieu périodique est défini par une cellule de base que l'on déplace par translation le long de trois vecteurs. La cellule de base n'est pas définie de manière unique comme illustré sur la Figure 3.1. En revanche les propriétés effectives du composite, même calculées sur des cellules différentes, sont déterminées de façon unique. Il faudra donc veiller à respecter cette indépendance par rapport au choix de la cellule. Ce choix est souvent dicté par l'exploitation de symétries géométriques qui simplifient significativement l'explicitation des conditions aux limites de périodicité. Dans le cas du réseau hexagonal de la Figure 3.1, la cellule de base la plus simple est certainement l'hexagone lui-même. Néanmoins les conditions de périodicité sur l'hexagone peuvent être difficiles à manipuler pour un code numérique standard. On pourra donc lui préférer la cellule rectangulaire de la Figure 3.1 pour laquelle les conditions de périodicité s'expriment par annulation de composantes du déplacement après usage de symétries. Il n'y a aucune raison pour que la cellule de base soit un polygone (on peut par exemple penser à un pavage de l'espace à la Escher).

3.2.2. Champs de déformation périodiques

Considérons un élément de volume périodique mais de grande taille (donc contenant un grand nombre de cellules de base). Lorsqu'on impose un déplacement affine $\mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x}$ au bord de cet élément de volume, l'état de déformation qui en résulte dans le matériau homogénéisé est homogène $\boldsymbol{\varepsilon} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$. L'état de contrainte est également homogène, $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$. Dans le milieu hétérogène réel, les champs locaux $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont oscillants et fluctuent autour de leurs valeurs moyennes $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$. Loin du bord on peut faire abstraction du *détail* des conditions aux limites (principe de St Venant en élasticité). La géométrie du milieu est invariante par translation le long des vecteurs de périodicité. Les solutions $\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ possèdent donc également cette propriété d'invariance. Ils sont périodiques.

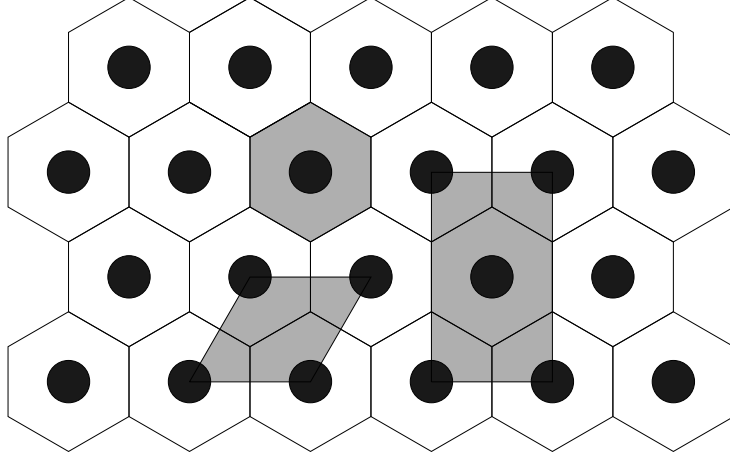


Figure 3.1. *Fibres circulaires en réseau hexagonal. Différents choix possibles pour la cellule de base.*

Le champ local de déformation $\varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ peut être décomposé en le champ moyen $\bar{\varepsilon}$ qui serait le champ de déformation si le milieu était homogène et une correction fluctuante $\varepsilon'(\mathbf{x})$ qui tient compte de la présence des hétérogénéités. Ce terme supplémentaire dérive d'un déplacement \mathbf{u}' (puisque ε dérive de \mathbf{u} et $\bar{\varepsilon}$ dérive de $\bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{x}$). $\bar{\varepsilon}$ donne la déformation du réseau tandis que $\varepsilon'(\mathbf{x})$ est de moyenne nulle. \mathbf{u}' est un champ périodique (à un déplacement rigide près, sans intérêt dans le présent contexte de transformations infinitésimales) pour les raisons données plus haut (invariance par translation du problème le définissant). Les champs de déformation et de déplacement admettent donc la décomposition suivante :

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{x}), & \varepsilon(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \bar{\varepsilon} + \varepsilon'(\mathbf{x}), \\ & & \mathbf{u}' &\text{périodique.} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Par "périodicité de \mathbf{u}' " on entend que toutes les composantes de \mathbf{u}' prennent des valeurs identiques aux points du bord de la cellule de base qui se correspondent par translation le long des vecteurs du réseau périodique. On utilisera la notation abrégée $\mathbf{u}' \#$ pour noter que le champ \mathbf{u}' est périodique.

On notera les relations suivantes conséquences de la périodicité de \mathbf{u}'

$$\langle \varepsilon' \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon \rangle = \bar{\varepsilon}. \quad (3.2)$$

Pour montrer (3.2) à partir de (3.1) on note que par intégration par parties on a

$$\langle \varepsilon' \rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \mathbf{u}' \otimes_s \mathbf{n} \, ds, \quad (3.3)$$

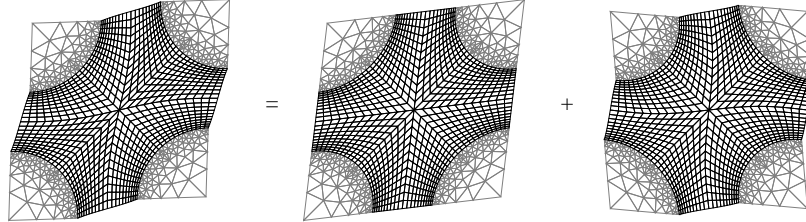


Figure 3.2. *Décomposition en partie moyenne et fluctuante du champ de déformation.*

où $(\mathbf{a} \otimes_s \mathbf{b})_{ij} = \frac{1}{2} (a_i b_j + a_j b_i)$. L'intégrale de bord s'annule car \mathbf{u}' prend des valeurs identiques aux points opposés de ∂V tandis que \mathbf{n} prend des valeurs opposées en ces points. Les relations (3.2) doivent être comprises dans un sens généralisé lorsque certaines des phases sont des vides (le champ de déformation n'est pas défini dans les vides). La relation de moyenne généralisée, valide lorsque les vides ne rencontrent pas le bord de la cellule, s'écrit

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \mathbf{u} \otimes_s \mathbf{n} \, ds. \quad (3.4)$$

3.2.3. Champs de contrainte périodiques

Le champ de contrainte local $\boldsymbol{\sigma}$, en plus d'être périodique est en équilibre sur l'ensemble du milieu. Il satisfait donc l'équilibre volumique dans V et l'équilibre aux interfaces au bord de V qui traduit l'équilibre d'une cellule avec les cellules voisines. La première condition se traduit par le fait que $\boldsymbol{\sigma}$ est à divergence nulle dans V . L'équilibre des cellules adjacentes et la périodicité du champ de contrainte se traduit par le fait que les vecteurs contraintes sur des côtés opposés de ∂V sont opposés (ne pas oublier que $\boldsymbol{\sigma}$ prend des valeurs identiques mais \mathbf{n} prend des valeurs opposées sur ces côtés). Les équations d'équilibre pour $\boldsymbol{\sigma}$ s'écrivent donc :

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \text{ dans } V, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ opposés sur côtés opposés de } \partial V. \quad (3.5)$$

La notation abrégée $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ sera utilisée dans la suite pour désigner un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ satisfaisant la seconde condition de (3.5). Le tenseur des contraintes macroscopiques $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est défini comme la moyenne du champ local

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle. \quad (3.6)$$

Cette définition est cohérente avec la définition usuelle de Cauchy (en terme de forces) du tenseur $\bar{\sigma}$ (voir Anthoine [ANT 95] pour plus de détails). Lorsque le composite contient des inclusions rigides (où σ n'est pas défini) une autre expression obtenu par intégration par parties à partir de (3.6) doit être utilisée :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \sigma \cdot \mathbf{n} \otimes_s \mathbf{x} \, ds. \quad (3.7)$$

Il est important de noter que le *théorème de Hill* s'applique aux milieux périodiques (cf Suquet, 1987, [SUQ 87]) :

Soient \mathbf{u} et σ des champs de déplacement et de contrainte de la forme (3.1) et (3.5) respectivement. Alors

$$\langle \sigma : \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle = \langle \sigma \rangle : \langle \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle. \quad (3.8)$$

En d'autres termes la moyenne du travail microscopique est égale au travail macroscopique. Pour établir (3.8) on note à partir de la décomposition (3.1) que

$$\langle \sigma : \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle = \langle \sigma : \varepsilon(\mathbf{u}') \rangle + \langle \sigma \rangle : \langle \varepsilon(\mathbf{u}) \rangle. \quad (3.9)$$

Par le principe des travaux virtuels sur V on obtient

$$\langle \sigma : \varepsilon(\mathbf{u}') \rangle = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' \, ds. \quad (3.10)$$

Mais \mathbf{u}' prend des valeurs identiques sur les faces opposées de V tandis que $\sigma \cdot \mathbf{n}$ prend des valeurs opposées. La dernière intégrale écrite est donc nulle.

3.3. Propriétés élastiques effectives

3.3.1. Approche en déformation

Dans cette section les constituants individuels sont supposés élastiques linéaires de raideur $\mathbf{C}(\mathbf{x})$. Cette information supplémentaire permet la détermination, au moins théorique, des champs locaux de contrainte et de déformation induits à l'échelle microscopique par une déformation macroscopique $\bar{\varepsilon}$ ou une contrainte macroscopique $\bar{\sigma}$. Cette détermination se fait en résolvant le *problème local* qui comprend la loi de comportement des constituants, les équations d'équilibre, les conditions de périodicité et la condition de moyenne :

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}) : (\varepsilon(\mathbf{u}'(\mathbf{x})) + \bar{\varepsilon}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \\ \text{div}(\sigma(\mathbf{x})) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad \mathbf{u}' \# , \sigma \cdot \mathbf{n} \# . \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Le problème (3.11) admet une solution \mathbf{u}' unique à un vecteur constant près (les translations sont les seuls déplacements rigides périodiques) dès lors que la déformation moyenne $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est spécifiée.

Une fois le problème local (3.11) résolu, la contrainte macroscopique $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est calculée à l'aide des relations (3.6) et les propriétés élastiques effectives $\tilde{\mathbf{C}}$ du composite sont déterminées par la relation

$$\tilde{\mathbf{C}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rangle. \quad (3.12)$$

La déformation $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ apparaît comme un “chargement généralisé” dans (3.11) et peut être traitée comme une déformation thermique généralisée (ou “déformation libre”). La déformation macroscopique $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ peut se décomposer en états élémentaires :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\varepsilon}_{ij} \mathbf{i}^{ij}, \quad \mathbf{i}^{ij}_{kh} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}). \quad (3.13)$$

La solution \mathbf{u} et sa composante périodique \mathbf{u}' se décomposent également sur une base de solutions correspondant à ces sollicitations élémentaires :

$$\mathbf{u} = \bar{\varepsilon}_{ij} \mathbf{u}^{ij}, \quad \mathbf{u}' = \bar{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\chi}^{ij}, \quad \mathbf{u}^{ij} = \mathbf{i}^{ij} \cdot \mathbf{x} + \boldsymbol{\chi}^{ij}, \quad (3.14)$$

où $\boldsymbol{\chi}^{ij}$ est la solution problème local (3.11) lorsque $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{i}^{ij}$. Cette décomposition utilisée dans (3.12), conduit à un tenseur d'élasticité effective du composite :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ijkl} = \langle C_{ijpq} \varepsilon_{pq}(\mathbf{u}^{kh}) \rangle. \quad (3.15)$$

Une expression équivalente de $\tilde{\mathbf{C}}$, mais montrant mieux la symétrie de ce tenseur, peut être obtenue à l'aide du théorème de Hill :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ijkl} = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{ij}) : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{kh}) \rangle. \quad (3.16)$$

Il est apparent sur (3.16) que $\tilde{\mathbf{C}}$ possède la symétrie diagonale usuelle des tenseurs d'élasticité :

$$\tilde{\mathbf{C}}_{ijkl} = \tilde{\mathbf{C}}_{jikl} = \tilde{\mathbf{C}}_{klij}. \quad (3.17)$$

Ce même tenseur d'élasticité effective $\tilde{\mathbf{C}}$ peut aussi être obtenu en raisonnant sur l'énergie élastique du composite. La loi de comportement élastique linéaire de chaque constituant dérive de l'énergie élastique de ce constituant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}), \quad w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.18)$$

Il résulte du *principe de l'énergie potentielle minimum* que la solution $\mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}'$ du problème local (3.11) a la propriété variationnelle suivante :

$$\langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \rangle = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})} \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle, \quad (3.19)$$

où

$$\mathcal{K}(\bar{\varepsilon}) = \{\mathbf{v} = \bar{\varepsilon} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}', \quad \mathbf{v}' \# \}. \quad (3.20)$$

L'énergie libre est une grandeur additive. Par suite l'énergie libre \tilde{w} du composite (qui se réduit dans ce cas à son énergie élastique) est donnée par

$$\tilde{w}(\bar{\varepsilon}) = \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \rangle = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\bar{\varepsilon})} \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle. \quad (3.21)$$

Alors la relation contrainte-déformation macroscopique s'écrit (voir [PON 98] par exemple),

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}) = \bar{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.22)$$

La propriété (3.21), est connue sous le nom de *principe variationnel moyen* (“average variational principle”). Il est également vrai pour des énergies de déformation $w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$ non quadratiques (mais convexes). Il résulte en particulier de (3.21) et (3.16) que

$$\frac{1}{2} \tilde{C}_{ijij} = \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{ij})) \rangle = \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\mathbf{i}^{ij})} \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle, \quad (3.23)$$

sans sommation sur i et j .

Approche en contrainte

En pratique il est souvent utile ou nécessaire d'imposer la contrainte macroscopique $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ plutôt que la déformation $\bar{\varepsilon}$. La relation (3.22) peut être inversée en

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\partial \tilde{w}^*}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}), \quad \tilde{w}^*(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \sup_{\bar{\varepsilon}} [\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\varepsilon} - \tilde{w}(\bar{\varepsilon})]. \quad (3.24)$$

L'énergie complémentaire \tilde{w}^* peut être caractérisée par deux propriétés variationnelles équivalentes. La première propriété est une conséquence directe de (3.21) et (3.24) :

$$\tilde{w}^*(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = - \inf_{\bar{\varepsilon}} \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{K}(\bar{\varepsilon})} [\langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) \rangle - \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\varepsilon}]. \quad (3.25)$$

L'autre propriété est le “principe variationnel moyen” dual de (3.21) :

$$\tilde{w}^*(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}})} \langle w^*(\boldsymbol{\tau}) \rangle, \quad (3.26)$$

où

$$\mathcal{S}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \{\boldsymbol{\tau}, \quad \langle \boldsymbol{\tau} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \operatorname{div}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})) = 0, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = \# \}. \quad (3.27)$$

La formulation (3.25) est souvent plus appropriée pour le traitement numérique par un code aux éléments finis en déplacements.

3.4. Résolution du problème par la méthode des éléments finis

Cette section est consacrée à la résolution du problème local par la méthode des éléments finis. La cellule de base est supposée discrétisée. On note e l'élément fini courant. Un vecteur du problème éléments finis sera représenté entre accolades, *e.g.* $\{\mathbf{u}\}$, une matrice entre crochets, *e.g.* $[\mathbf{K}]$.

3.4.1. Formulation variationnelle pour les composites élastiques linéaires

La décomposition

$$\mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}', \quad \mathbf{u}' \# , \quad (3.28)$$

suggère de résoudre le problème en \mathbf{u}' , la partie périodique de \mathbf{u} . Lorsque les constituants sont élastiques linéaires, la formulation variationnelle du problème est :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}' \text{ périodique tel que} \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') \rangle = - \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') \rangle \text{ pour tout } \mathbf{v}' \# , \end{array} \right\} \quad (3.29)$$

ou après discrétisation,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trouver } \{\mathbf{u}'\} \text{ périodique tel que} \\ \{\mathbf{v}'\}^T [\mathbf{K}] \{\mathbf{u}'\} = \{\mathbf{v}'\}^T \{\mathbf{f}\} \text{ pour tout } \{\mathbf{v}'\} \# , \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

avec $[\mathbf{K}]$ la matrice de rigidité globale,

$$[\mathbf{K}] = \sum_e [\mathbf{k}^e], \quad [\mathbf{k}^e] = \frac{1}{|\mathbf{V}|} \int_e [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] [\mathbf{B}] d\mathbf{x}, \quad (3.31)$$

$[\mathbf{B}]$ la matrice qui relie déformations et déplacements, *i.e.* $\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}'\}$, et $\{\mathbf{f}\}$ le vecteur correspondant au second membre de (3.29) que nous expliciterons plus tard.

Indépendamment du comportement des matériaux constituant la cellule de base, le problème local à résoudre présente deux particularités. La première est la condition de périodicité que doivent satisfaire $\{\mathbf{u}'\}$ et $\{\mathbf{v}'\}$. La seconde est que le chargement s'effectue en moyenne. Lorsque la géométrie et le chargement présentent un nombre suffisant de symétries, il est possible de réduire les conditions de périodicité à des conditions aux limites classiques, section 3.4.2. Pour une géométrie ou un chargement sans particularités, nous proposons dans la section 3.4.3 de prendre en compte les conditions de périodicité par une méthode d'élimination. La section 3.4.4 traite des chargements imposés en moyenne.

3.4.2. Conditions de symétrie

Lorsque la cellule de base présente un plan de symétrie (géométrique et matériel), la résolution du problème local peut être ramenée à celle d'un problème posé sur une moitié de cellule avec des conditions aux limites classiques sur les bords parallèles au plan de symétrie.

Supposons pour exemple que la cellule de base soit un parallélépipède rectangle,

$$V = \prod_{i=1}^3 \left[-\frac{L_i}{2}, +\frac{L_i}{2} \right], \quad (3.32)$$

et que le plan $x_2=0$ soit plan de symétrie. On note \mathbf{T} la symétrie par rapport à ce plan et $\tilde{\bar{\epsilon}}$ le transformé de $\bar{\epsilon}$ par \mathbf{T} , $\tilde{\bar{\epsilon}} = \mathbf{T}^t \bar{\epsilon} \mathbf{T}$. Alors les champs \mathbf{u}' et $\boldsymbol{\sigma}$ solutions du problème local ont les propriétés de symétrie suivantes.

Si $\bar{\epsilon} = \tilde{\bar{\epsilon}}$, c'est-à-dire si

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \bar{\epsilon}_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \bar{\epsilon}_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 + 2\bar{\epsilon}_{13} \mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_3, \quad (3.33)$$

alors

$$\left. \begin{aligned} u'_i(x_1, -x_2, x_3) &= (-1)^{i+1} u'_i(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_{ij}(x_1, -x_2, x_3) &= (-1)^{i+j} \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Si $\bar{\epsilon} = -\tilde{\bar{\epsilon}}$, c'est-à-dire si

$$\bar{\epsilon} = 2\bar{\epsilon}_{12} \mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_2 + 2\bar{\epsilon}_{23} \mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_3, \quad (3.35)$$

alors

$$\left. \begin{aligned} u'_i(x_1, -x_2, x_3) &= (-1)^i u'_i(x_1, x_2, x_3), \\ \sigma_{ij}(x_1, -x_2, x_3) &= (-1)^{i+j+1} \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

Considérons le cas (3.33). D'après (3.34) u'_2 est impair et périodique. Il est donc nul sur les plans $x_2 = 0$ et $x_2 = \pm L_2/2$,

$$u'_2(x_1, 0, x_3) = u'_2(x_1, \pm L_2/2, x_3) = 0. \quad (3.37)$$

Pareillement,

$$\sigma_{12}(x_1, 0, x_3) = \sigma_{23}(x_1, 0, x_3) = \sigma_{12}(x_1, \pm L_2/2, x_3) = \sigma_{23}(x_1, \pm L_2/2, x_3) = 0. \quad (3.38)$$

Dans le cas (3.33), il s'ensuit que l'on pourra résoudre le problème local en ne considérant qu'une moitié de cellule, par exemple la moitié $x_2 > 0$, avec sur les plans $x_2 = 0$ et $x_2 = L_2/2$ les conditions aux limites suivantes :

$$u'_N(x_1, 0, x_3) = u'_N(x_1, L_2/2, x_3) = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_T(x_1, 0, x_3) = \boldsymbol{\sigma}_T(x_1, L_2/2, x_3) = 0, \quad (3.39)$$

où u'_N est la composante normale de \mathbf{u}' , $u'_N = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}$, et $\boldsymbol{\sigma}_T$ la contrainte tangentielle, $\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \sigma_N \mathbf{n}$ avec $\sigma_N = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Les conditions de périodicité sur les plans $x_1 = \pm L_1/2$, $x_3 = \pm L_3/2$ restent inchangées.

Dans le cas (3.35), on obtient de la même manière

$$\mathbf{u}'_T(x_1, 0, x_3) = \mathbf{u}'_T(x_1, \pm L_2/2, x_3) = 0, \quad \sigma_N(x_1, 0, x_3) = \sigma_N(x_1, \pm L_2/2, x_3) = 0. \quad (3.40)$$

où \mathbf{u}'_T désigne le déplacement tangentiel, $\mathbf{u}'_T = \mathbf{u}' - u'_N \mathbf{n}$.

Lorsque la cellule de base possède trois plans de symétrie orthogonaux, le problème local peut être résolu sur un huitième de cellule avec les conditions aux limites suivantes, exprimées au contour $\partial\tilde{V}$ de $\tilde{V} = \prod_{i=1}^3]0, +L_i/2[$,

Si $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{11} \mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_1 + \bar{\varepsilon}_{22} \mathbf{e}_2 \otimes_s \mathbf{e}_2 + \bar{\varepsilon}_{33} \mathbf{e}_3 \otimes_s \mathbf{e}_3$, alors

$$u'_N = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_T = 0 \quad \text{sur } \partial\tilde{V}. \quad (3.41)$$

Si $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{ij} \mathbf{e}_i \otimes_s \mathbf{e}_j$ sans sommation sur les indices répétés et pour $i \neq j$, alors

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_T = 0, \quad \sigma_N = 0 & \quad \text{sur les plans } x_i = 0, x_i = L_i/2, \text{ et } x_j = 0, x_j = L_j/2, \\ u'_N = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_T = 0 & \quad \text{sur les plans } x_k = 0, x_k = L_k/2, \quad k \neq i, j. \end{aligned} \quad (3.42)$$

D'autres propriétés de symétrie ou d'invariance peuvent être utilisées pour réduire le domaine d'étude. Il est par exemple possible d'étudier les réseaux hexagonaux en ne considérant qu'un douzième de la cellule hexagonale. Le lecteur pourra trouver d'autres exemples de simplification dans Anthoine [ANT 95] par exemple. Nous ne poursuivrons pas ici dans cette direction.

3.4.3. *Prise en compte des conditions de périodicité par une méthode d'élimination*

Soit $\{\mathbf{u}'\}$ le vecteur des inconnues nodales associé au champ \mathbf{u}' . On désigne par \mathbf{u}'_1 les composantes de $\{\mathbf{u}'\}$ qui sont libres, et par $\mathbf{u}'_2, \mathbf{u}'_3$ les composantes de $\{\mathbf{u}'\}$ qui sont liées par les conditions de périodicité :

$$[\mathbf{P}]\{\mathbf{u}'\} = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{P}] = [\mathbf{0}, \mathbf{I}, -\mathbf{I}], \quad \{\mathbf{u}'\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}'_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.43)$$

Avec ces notations, la formulation discrétisée (3.30) s'écrit

$$\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\} \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \\ \mathbf{u}'_3 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix}, \quad (3.44)$$

pour tout \mathbf{v}' tel que $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}'_3$. Après prise en compte de l'égalité $\mathbf{u}'_2 = \mathbf{u}'_3$, on obtient le système réduit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{12}^T + \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{K}_{22} + \mathbf{K}_{23} + \mathbf{K}_{23}^T + \mathbf{K}_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_1 \\ \mathbf{u}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix}. \quad (3.45)$$

3.4.4. Contrôle en déformation ou en contrainte

Contrôle en déformation

Considérons d'abord le cas où la déformation macroscopique $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est prescrite. Dans ce cas le second membre $\{\mathbf{f}\}$ de (3.30) prend la forme

$$\{\mathbf{f}\} = -[\bar{\mathbf{K}}] \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\}, \quad \text{où} \quad [\bar{\mathbf{K}}] = \sum_e [\bar{\mathbf{k}}^e], \quad [\bar{\mathbf{k}}^e] = \frac{1}{|V|} \int_e [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}] d\mathbf{x}, \quad (3.46)$$

et l'équation algébrique (3.30) peut être résolue classiquement.

Contrôle en contrainte

Considérons maintenant le cas où la contrainte macroscopique $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est prescrite. La prise en compte de ce cas est plus délicate car $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$, et par suite $\{\mathbf{f}\}$, ne sont pas connus. Il est possible de traiter le problème (3.11) avec la condition $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ comme un problème *avec contrainte*. Nous préférons une approche dont le contenu mécanique est plus riche. Soit \mathbf{v} un champ de déplacement de la forme (3.28),

$$\mathbf{v} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \cdot \mathbf{x} + \mathbf{v}', \mathbf{v}' \neq. \quad (3.47)$$

Le théorème de Hill appliqué à $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{v} donne :

$$\langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'. \quad (3.48)$$

Mais cette égalité peut être décomposée en :

$$\left. \begin{aligned} \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') \rangle + \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}') \rangle &= 0 \quad \forall \mathbf{v}' \neq, \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}') : \mathbf{C} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' \rangle + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \langle \mathbf{C} \rangle : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}' &= \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}', \quad \forall \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'. \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

Après discrétisation par éléments finis, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \bar{\mathbf{K}} \\ \bar{\mathbf{K}}^T & \bar{\bar{\mathbf{K}}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}' \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{Bmatrix}, \quad (3.50)$$

où $[\mathbf{K}]$ et $[\overline{\mathbf{K}}]$ sont données par (3.31) modifiées par (3.45) et (3.46), et $[\overline{\overline{\mathbf{K}}}]$ définie par :

$$[\overline{\overline{\mathbf{K}}}] = \langle \mathbf{C} \rangle. \quad (3.51)$$

L'égalité (3.50) montre la vraie nature des degrés de liberté $\{\mathbf{u}\}$ sur la cellule de base : les degrés de liberté périodiques $\{\mathbf{u}'\}$ décrivent les fluctuations locales du champ de déplacement, tandis que les degrés de liberté globaux $\{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ décrivent la déformation moyenne de la cellule. On voit aussi sur (3.50) que les forces associées à $\{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\}$ sont les composantes de la contrainte macroscopique $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$. Le chargement en moyenne devient alors un chargement classique, et imposer une déformation ou une contrainte macroscopique dans (3.50) ne pose pas plus de difficultés que d'imposer un déplacement ou une force dans un problème classique.

Prise en compte des degrés de liberté macroscopiques

Elle se fait par adjonction d'un noeud supplémentaire (appelé *noeud macroscopique*) commun à tous les éléments du maillage (Débordes *et al.* [DEB 85]). Ce noeud est ajouté à la table de connectivité de chaque élément de sorte que le vecteur des degrés de liberté élémentaires est remplacé par :

$$\{\mathbf{u}_e\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}'_e \\ \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{array} \right\}. \quad (3.52)$$

On substitue également à la matrice $[\mathbf{B}]$ classique la matrice :

$$[\widehat{\mathbf{B}}] = [\mathbf{B}, \mathbf{I}], \quad (3.53)$$

où $[\mathbf{I}]$ est la matrice identité. Après ces modifications, la déformation de chaque élément vérifie bien la décomposition (3.28),

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_e\} = [\widehat{\mathbf{B}}]\{\mathbf{u}_e\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}'_e\} + \{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\}, \quad (3.54)$$

et les matrices ou vecteurs élémentaires devant être assemblés pour former le système (3.50) prennent bien la forme voulue :

$$[\widehat{\mathbf{k}}_e] = \frac{1}{|V|} \int_e [\widehat{\mathbf{B}}]^T [\mathbf{C}] [\widehat{\mathbf{B}}] d\mathbf{x}, \quad (3.55)$$

$$\{\widehat{\mathbf{f}}_e\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{|V|} \int_e [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\mathbf{x} \\ \frac{1}{|V|} \int_e \{\boldsymbol{\sigma}\} d\mathbf{x} \end{array} \right\}. \quad (3.56)$$

3.5. Comportements non linéaires

Les développements précédents peuvent être étendus au cas où les constituants sont non linéaires. Il faut résoudre (en général numériquement) un problème local consistant en la loi de comportement (non linéaire dans ce cas), les équations d'équilibre et conditions de périodicité et la condition de moyenne, soit en contrainte soit en déformation ou vitesse de déformation.

Nous détaillons les cas particuliers où les constituants sont élastiques parfaitement plastiques, rigides plastiques, ou visqueux non linéaires en loi puissance.

3.5.1. Constituants élastoplastiques

Les constituants considérés ici sont élastiques (modules $\mathbf{C}(\mathbf{x})$) parfaitement plastiques (domaine d'élasticité $P(\mathbf{x})$ d'équation $P = \{\boldsymbol{\tau}, \mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}) \leq 0\}$). Le VER est soumis à un chargement temporel caractérisé par un trajet dans l'espace des déformations ($\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ est alors imposé) ou des contraintes ($\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ est alors imposé).

Les champs locaux $\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}'(t, \mathbf{x})$ évoluent dans la cellule de base. Le problème local est un problème d'évolution élasto-plastique qui s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{C}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x})) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P(t, \mathbf{x})), \\ \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x}) &\in P(\mathbf{x}), \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P(t, \mathbf{x}) = \dot{\lambda}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})), \quad \dot{\lambda} \geq 0, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})) &= 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \#, \\ \dot{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}) &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) \cdot \mathbf{x} + \dot{\mathbf{u}}'(t, \mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}' \neq \# \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Sauf cas très particuliers (laminés) on ne connaît pas de solution analytique à ces équations et on a recours à une résolution numérique.

Schéma d'intégration

L'intégration des équations incrémentales de l'élastoplasticité comporte une partie classique liée à la loi de comportement elle-même que nous ne discuterons pas (voir par exemple Simo et Taylor [SIM 86]) et une partie liée au chargement imposé en moyenne qui est plus spécifique de l'homogénéisation.

Considérons pour commencer le cas où l'on suit un trajet dans l'espace des déformations macroscopiques

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0, \quad (3.58)$$

où $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$ est donnée. L'inconnue principale au temps $t + \Delta t$ est

$$\{\mathbf{u}'\}_{t+\Delta t} = \{\mathbf{u}'\}_t + \{\Delta \mathbf{u}'\}. \quad (3.59)$$

Les variables d'état $\{\boldsymbol{\sigma}\}_t$ et $\{\mathbf{u}\}_t = t\{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 \cdot \mathbf{x}\} + \{\mathbf{u}'\}_t$ étant connues à l'instant t , l'accroissement $\{\Delta \mathbf{u}'\}$ doit satisfaire l'équilibre au temps $t + \Delta t$

$$\{\mathbf{v}'\}^T \{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t} = 0 \quad \forall \{\mathbf{v}'\} \neq \mathbf{0}, \quad \{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t} = - \left\{ \frac{1}{|V|} \sum_e \int_e [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_{t+\Delta t} d\mathbf{x} \right\}. \quad (3.60)$$

$\{\boldsymbol{\sigma}\}_{t+\Delta t}$ dépend des conditions initiales $\{\boldsymbol{\sigma}\}_t$ et des accroissements $\{\Delta \mathbf{u}'\}$, $\{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \Delta t \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0\}$. (3.60) est une équation non linéaire que l'on peut résoudre par une méthode de Newton.

A l'itération $i+1$ du pas $t + \Delta t$, $\{\Delta \mathbf{u}'\}^i$ et $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{t+\Delta t}^i$ sont connus.

i) Résoudre le système linéaire,

$$[\mathbf{K}]_{t+\Delta t}^i \{\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}'\}^{i+1} = \{\mathbf{R}\}_{t+\Delta t}^i, \quad \{\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}'\}^{i+1} \neq \mathbf{0}. \quad (3.61)$$

ii) Mettre à jour $\{\Delta \mathbf{u}'\}^i$,

$$\{\Delta \mathbf{u}'\}^{i+1} = \{\Delta \mathbf{u}'\}^i + \{\boldsymbol{\delta} \mathbf{u}'\}^{i+1}. \quad (3.62)$$

La matrice de raideur $[\mathbf{K}]_{t+\Delta t}^i$ est choisie constante et égale à la matrice de raideur élastique initiale, $[\mathbf{K}]_{t+\Delta t}^i = [\mathbf{K}]$. La contrainte $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{t+\Delta t}^{i+1}$ est calculée à partir de $\{\boldsymbol{\sigma}\}_t$, $\{\Delta \mathbf{u}'\}^{i+1}$ et $\{\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \Delta t \{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0\}$ par une méthode de retour radial (Simo et Taylor [SIM 86]).

Pilotage par les contraintes

Il arrive souvent que l'on souhaite imposer un trajet dans l'espace des contraintes et non des déformations, ou parfois seulement imposer une direction dans l'espace des contraintes :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(t) = k(t) \boldsymbol{\sigma}^0, \quad (3.63)$$

où $\boldsymbol{\sigma}^0$ est donné mais $k(t)$ inconnu. $k(t)$ est déterminé par une condition supplémentaire de type longueur d'arc $\boldsymbol{\sigma}^0 : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = t$. Le cas typique est celui de la traction simple, où l'on connaît la forme du tenseur macroscopique des contraintes (donc $\boldsymbol{\sigma}^0$) mais pas celle du tenseur des déformations. On ne pilote

pas par le niveau de contrainte, ce qui au voisinage de la charge limite conduirait à des instabilités numériques, mais par la longueur du trajet parcouru dans l'espace contrainte-déformation (pour une présentation générale des méthodes de longueur d'arc voir par exemple Crisfield [CRI 91]).

Les inconnues principales au temps $t + \Delta t$ sont

$$k_{t+\Delta t}, \quad \{\mathbf{u}'\}_{t+\Delta t} = \{\mathbf{u}'\}_t + \{\Delta \mathbf{u}'\}, \quad \{\bar{\varepsilon}\}_{t+\Delta t} = \{\bar{\varepsilon}\}_t + \{\Delta \bar{\varepsilon}\}, \quad (3.64)$$

où $\{\Delta \bar{\varepsilon}\}$ est tel que $\{\boldsymbol{\sigma}^0\}^T \{\Delta \bar{\varepsilon}\} = \Delta t$. Les équations d'équilibre au temps $t + \Delta t$ s'écrivent

$$\{\mathbf{v}', \bar{\varepsilon}'\}^T \left\{ \widehat{\mathbf{R}} \right\}_{t+\Delta t} = 0, \quad \forall \{\mathbf{v}'\} \neq, \quad \forall \{\bar{\varepsilon}'\}, \quad (3.65)$$

avec

$$\left\{ \widehat{\mathbf{R}} \right\}_{t+\Delta t} = k_{t+\Delta t} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{|V|} \sum_e \int_e [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_{t+\Delta t} d\mathbf{x} \\ \frac{1}{|V|} \sum_e \int_e \{\boldsymbol{\sigma}\}_{t+\Delta t} d\mathbf{x} \end{array} \right\}. \quad (3.66)$$

La procédure itérative utilisée pour résoudre cette équation non linéaire peut être résumée ainsi :

Calculer une fois pour toutes $\{\mathbf{u}'_0\}$, $\{\bar{\varepsilon}_0\}$ satisfaisant

$$[\widehat{\mathbf{K}}] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}'_0 \\ \bar{\varepsilon}_0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}^0 \end{array} \right\}, \quad [\widehat{\mathbf{K}}] = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{K} & \overline{\mathbf{K}} \\ \overline{\mathbf{K}}^T & \overline{\mathbf{K}} \end{array} \right], \quad (3.67)$$

Puis, $\{\Delta \mathbf{u}'\}^i$, $\{\Delta \bar{\varepsilon}\}^i$ étant supposés connus et tels que $\{\Delta \bar{\varepsilon}\}^i$ vérifie $\{\boldsymbol{\sigma}^0\}^T \{\Delta \bar{\varepsilon}\}^i = \Delta t$,

i) Calculer $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{t+\Delta t}^i$ en chaque point d'intégration,

ii) Résoudre le système linéaire,

$$[\widehat{\mathbf{K}}] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}'_1 \\ \bar{\varepsilon}_1 \end{array} \right\} = - \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{|V|} \sum_e \int_e [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_{t+\Delta t}^i d\mathbf{x} \\ \frac{1}{|V|} \sum_e \int_e \{\boldsymbol{\sigma}\}_{t+\Delta t}^i d\mathbf{x} \end{array} \right\}, \quad (3.68)$$

iii) Mettre à jour $k_{t+\Delta t}^{i+1}$, $\{\Delta \mathbf{u}'\}^{i+1}$ et $\{\Delta \bar{\varepsilon}\}^{i+1}$,

$$k_{t+\Delta t}^{i+1} = - \frac{\{\boldsymbol{\sigma}^0\}^T \{\bar{\varepsilon}_1\}}{\{\boldsymbol{\sigma}^0\}^T \{\bar{\varepsilon}_0\}}, \quad (3.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{u}' \\ \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{array} \right\}^{i+1} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{u}' \\ \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{array} \right\}^i + k_{t+\Delta t}^{i+1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}'_0 \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}'_1 \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \end{array} \right\}. \quad (3.70)$$

3.5.2. Constituants rigides plastiques

Lorsque les phases sont rigides plastiques leur résistance est caractérisée par un *domaine de résistance* $P(\mathbf{x})$ qui est un ensemble convexe dans l'espace des contraintes. La fonction de dissipation plastique associée (cf Salençon [SAL 83]) est définie par

$$w(\mathbf{x}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sup_{\boldsymbol{\tau} \in P(\mathbf{x})} \boldsymbol{\tau} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.71)$$

Le *domaine de résistance effectif* du composite est défini comme suit (Suquet [SUQ 83] [SUQ 87]),

$$\begin{aligned} \tilde{P} = \{ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \text{ tel qu'il existe } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \text{ avec } \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \in P(\mathbf{x}) \text{ pour tout } \mathbf{x} \text{ dans } V, \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \# \}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Le bord de \tilde{P} est la surface d'écoulement macroscopique (ou surface extrême selon Hill, 1967 [HIL 67]). Cette surface dépend bien entendu du domaine de résistance des phases et de leur géométrie. Pour une discussion approfondie des propriétés de \tilde{P} et des applications, on renvoie le lecteur à Suquet [SUQ 87], De Buhan et Taliercio [DEB 91], Taliercio et Samagroso [TAL 95], Francescato et Pastor [FRA 97] parmi d'autres. La détermination numérique de \tilde{P} peut se faire à l'aide de la caractérisation statique (3.72) (voir par exemple [FRA 97]) mais elle est difficile car elle nécessite de construire numériquement des champs statiquement admissibles. Une méthode cinématique s'avère souvent plus pratique. Soit $\tilde{w}(\cdot)$ le potentiel de dissipation effectif associé aux potentiels locaux $w(\mathbf{x}, \cdot)$ par le principe variationnel moyen (3.21). Il résulte de [SUQ 87] que

$$\tilde{w}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \sup_{\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \tilde{P}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \inf_{\dot{\boldsymbol{\nu}} \in \mathcal{K}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})} \langle w(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{\nu}})) \rangle. \quad (3.73)$$

Le problème de minimisation (3.73) est non régulier au sens que la fonction à minimiser w est non différentiable. Cette minimisation peut être effectuée directement (De Buhan et Maghous [DEB 95]) mais il est aussi commode de la remplacer par un problème d'évolution quasi-statique pour des phases élastiques parfaitement plastiques (et non plus rigides plastiques). On attribue donc à chaque constituant élémentaire une raideur élastique (réelle ou artificielle) $\mathbf{C}(\mathbf{x})$. Cette modification du comportement est légitime car la surface d'écoulement macroscopique du composite est indépendante de l'élasticité des phases. Puis on introduit un temps artificiel t . Enfin on résout le problème

d'évolution (3.57) par la méthode décrite ci-dessus en laissant le temps évoluer et en imposant soit une vitesse de déformation $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0$ constante, soit une direction de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^0$. En général la contrainte et la vitesse de déformation macroscopiques atteignent asymptotiquement des valeurs constantes $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\infty$ et $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\infty$ ¹. Le point $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\infty$ est sur le bord de \tilde{P} et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^\infty$ est une normale extérieure au bord de \tilde{P} en $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\infty$.

3.5.3. Matériaux en loi puissance

Le fluage à haute température des métaux est couramment décrit par une relation en loi puissance. En négligeant l'élasticité des phases et en supposant que les déformations sont incompressibles, le potentiel de dissipation des constituants prend la forme

$$w(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{\sigma_0 \dot{\varepsilon}_0}{m+1} \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{eq}}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{m+1}, \quad \text{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = 0, \quad (3.74)$$

où $\dot{\varepsilon}_0$ et σ_0 désignent respectivement une vitesse de déformation et une contrainte de référence et où m est l'exposant de sensibilité à la vitesse de déformation. La relation constitutive s'écrit

$$\frac{s_{ij}}{\sigma^{\text{eq}}} = \frac{2}{3} \frac{\dot{\varepsilon}_{ij}}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{eq}}}, \quad \frac{\sigma^{\text{eq}}}{\sigma_0} = \left(\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{eq}}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^m, \quad \sigma^{\text{eq}} = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{eq}} = \left(\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right)^{1/2}, \quad (3.75)$$

où \mathbf{s} est le déviateur des contraintes. Il est commode d'introduire l'exposant conjugué $n = 1/m$. Deux cas méritent une attention particulière. Lorsque $n = m = 1$, le matériau est un milieu newtonien incompressible de viscosité $\mu = \sigma_0/3\dot{\varepsilon}_0$. Lorsque $m \rightarrow 0$ (ou $n \rightarrow \infty$) le matériau est un solide rigide plastique de von Mises et σ_0 désigne sa contrainte d'écoulement en traction simple.

Les propriétés effectives de ces matériaux sont gouvernées par le principe variationnel moyen (3.21). Lorsque l'exposant m est identique pour *tous* les constituants, le composite est lui-même un matériau en loi puissance de même exposant. En d'autres termes, le potentiel effectif \tilde{w} est homogène de degré $m+1$ par rapport à $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\tilde{w}(\lambda \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = |\lambda|^{m+1} \tilde{w}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}). \quad (3.76)$$

La contrainte d'incompressibilité qui accompagne le comportement des matériaux en loi puissance nécessite une modification de l'ensemble des champs

¹Il se peut que ces limites n'existent pas. Alors, soit le domaine de résistance macroscopique est non borné dans la direction $\boldsymbol{\sigma}^0$ (en direction de contrainte imposée), soit le domaine de résistance ne possède pas de normale extérieure dans la direction de déformation imposée.

cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{K}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \{\dot{\boldsymbol{v}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \boldsymbol{x} + \dot{\boldsymbol{v}}', \quad \dot{\boldsymbol{v}}' \# \#, \quad \operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \boldsymbol{x} \in V\}. \quad (3.77)$$

Du point de vue numérique, les calculs avec des matériaux en loi puissance posent donc le double problème de la non linéarité et de l'incompressibilité. Les méthodes à base de Lagrangien sont bien adaptées à ces deux difficultés. Illustrons par exemple le cas où la contrainte $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ est imposée. On introduit le Lagrangien suivant :

$$L_r(\dot{\boldsymbol{v}}', \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, p) = \langle w_r(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{v}}') + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \rangle - \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \langle p (\operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{v}}') + \operatorname{tr}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})) \rangle, \quad (3.78)$$

où $p = \sigma_{kk}/3$ est le champ de pression et w_r le potentiel "augmenté"

$$w_r(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) = w(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \frac{r}{2} \sigma_0 \dot{\varepsilon}_0 \left(\frac{\operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}})}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^2. \quad (3.79)$$

r est un paramètre positif ajustable. Le problème (3.25) se ramène à la recherche d'un point selle du Lagrangien

$$\sup_p \inf_{\dot{\boldsymbol{v}}' \# \#, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} L_r(\dot{\boldsymbol{v}}', \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, p). \quad (3.80)$$

En pratique on adopte l'algorithme suivant :

$$\left. \begin{aligned} (\dot{\boldsymbol{u}}', \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) &= \operatorname{Argmin}_{\dot{\boldsymbol{v}}', \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}'} L_r(\dot{\boldsymbol{v}}', \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}', p_k), \\ p_{k+1} &= p_k + \rho (\operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{u}}') + \operatorname{tr}(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}})), \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

avec $\rho = r$ (ici, mais peut être variable dans d'autres cas), le problème non linéaire en $(\dot{\boldsymbol{u}}', \bar{\boldsymbol{\varepsilon}})$ étant résolu par une méthode de substitution.

3.6. Une méthode basée sur la Transformée de Fourier Rapide

Une méthode numérique utilisant directement les images des microstructures sans recours à un maillage des différentes phases a été proposée récemment par Moulinec et Suquet ([MOU 94] [MOU 95] [MOU 98]). Elle est basée sur la transformée de Fourier pour résoudre numériquement le problème (3.11)²

²Müller [MUL 96] a appliqué une méthode voisine à des problèmes de transformation de phases.

3.6.1. Le problème de la déformation libre. Opérateur de Green périodique

Considérons pour commencer le problème d'un milieu homogène soumis à une précontrainte $\boldsymbol{\tau}$:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V, \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ -} \# . \end{aligned} \right\} \quad (3.82)$$

Il est classique d'interpréter la précontrainte $\boldsymbol{\tau}$ comme provenant d'une déformation libre $\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}^T$, où la déformation libre $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ est causée par la dilatation thermique, la plasticité ou tout autre phénomène physique. Après transformation de Fourier le système d'équations (3.82) prend la forme

$$\hat{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = i C_{ijkh}^0 \xi_h \hat{u}'_k(\boldsymbol{\xi}) + \hat{\tau}_{ij}(\boldsymbol{\xi}), \quad i \hat{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \xi_j = 0. \quad (3.83)$$

où $i = \sqrt{-1}$. Après élimination de $\hat{\sigma}_{ij}$, l'équation résultante pour \hat{u}' peut être inversée pour donner :

$$K_{ik}^0(\boldsymbol{\xi}) \hat{u}'_k = i \hat{\tau}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) \xi_j, \quad \hat{u}'_k(\boldsymbol{\xi}) = \frac{i}{2} (N_{ki}^0(\boldsymbol{\xi}) \xi_j + N_{kj}^0(\boldsymbol{\xi}) \xi_i) \hat{\tau}_{ij}(\boldsymbol{\xi}), \quad (3.84)$$

où l'on a noté respectivement $\mathbf{K}^0(\boldsymbol{\xi})$ et $\mathbf{N}^0(\boldsymbol{\xi})$ le tenseur acoustique du milieu homogène et son inverse :

$$K_{ik}^0(\boldsymbol{\xi}) = C_{ijkh}^0 \xi_j \xi_h, \quad \mathbf{N}^0(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{K}^0(\boldsymbol{\xi})^{-1}. \quad (3.85)$$

Alors

$$\hat{\varepsilon}_{kh}(u') = \frac{i}{2} (\xi_h \hat{u}'_k(\boldsymbol{\xi}) + \xi_k \hat{u}'_h(\boldsymbol{\xi})) = -\hat{\Gamma}_{khij}^0(\boldsymbol{\xi}) \hat{\tau}_{ij}(\boldsymbol{\xi}), \quad (3.86)$$

où

$$\hat{\Gamma}_{khij}^0 = \frac{1}{4} (N_{hi}^0(\boldsymbol{\xi}) \xi_j \xi_k + N_{ki}^0(\boldsymbol{\xi}) \xi_j \xi_h + N_{hj}^0(\boldsymbol{\xi}) \xi_i \xi_k + N_{kj}^0(\boldsymbol{\xi}) \xi_i \xi_h), \quad (3.87)$$

et

$$\hat{\tau}_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \langle \tau_{ij}(\mathbf{x}) e^{-i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}} \rangle. \quad (3.88)$$

Le champ de déformation créé par une précontrainte $\boldsymbol{\tau}$ résulte de (3.86), (3.87) et (3.88). L'expression détaillée de $\boldsymbol{\Gamma}^0$ pour différents types d'anisotropie du milieu de référence peut être trouvée dans Mura [MUR 87]. Lorsque le milieu de référence est isotrope de coefficients de Lamé λ_0 et μ_0 , les expressions précédentes deviennent :

$$C_{ijkh}^0 = \lambda^0 \delta_{ij} \delta_{kh} + \mu^0 (\delta_{ik} \delta_{jh} + \delta_{ih} \delta_{jk}), \quad (3.89)$$

$$K_{ij}^0(\boldsymbol{\xi}) = (\lambda^0 + \mu^0) \xi_i \xi_j + \mu^0 |\boldsymbol{\xi}|^2 \delta_{ij}, \quad N_{ij}^0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mu^0 |\boldsymbol{\xi}|^2} \left(\delta_{ij} - \frac{\xi_i \xi_j}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \frac{\lambda^0 + \mu^0}{\lambda^0 + 2\mu^0} \right), \quad (3.90)$$

et

$$\widehat{\Gamma}_{khij}^0(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\mu^0 |\boldsymbol{\xi}|^2} (\delta_{ki} \xi_h \xi_j + \delta_{hi} \xi_k \xi_j + \delta_{kj} \xi_h \xi_i + \delta_{hj} \xi_k \xi_i) - \frac{\lambda^0 + \mu^0}{\mu^0 (\lambda^0 + 2\mu^0)} \frac{\xi_i \xi_j \xi_k \xi_h}{|\boldsymbol{\xi}|^4} \quad (3.91)$$

3.6.2. Milieu élastique périodique et hétérogène

En introduisant un milieu élastique de référence de raideur élastique \mathbf{C}^0 , le problème local (3.11) peut être ré-écrit sous la forme précédente (3.82) où le tenseur de polarisation $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x})$ est donné par :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\delta}\mathbf{C}(\mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'(\mathbf{x})) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \mathbf{C}^0 : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \boldsymbol{\delta}\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) - \mathbf{C}^0. \quad (3.92)$$

On notera que $\boldsymbol{\tau}$ dépend de l'inconnue \mathbf{u}' . La solution du problème (3.82) s'exprime au moyen de l'opérateur de Green périodique associé au tenseur d'élasticité \mathbf{C}^0 et s'écrit dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}'(\mathbf{x})) &= -\boldsymbol{\Gamma}^0 * \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \\ \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'(\boldsymbol{\xi}) &= -\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) : \widehat{\boldsymbol{\tau}}(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}, \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (3.93)$$

En substituant l'expression (3.92) de la polarisation $\boldsymbol{\tau}$ dans cette relation, le problème local initial devient l'équation intégrale de Lippmann-Schwinger périodique pour $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ qui s'écrit, dans les espaces réel et de Fourier respectivement :

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) &= -\boldsymbol{\Gamma}^0 * (\boldsymbol{\delta}\mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})(\boldsymbol{\xi}) &= -\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) : \widehat{\boldsymbol{\delta}\mathbf{C}} : \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}, \quad \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})(\mathbf{0}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

3.6.3. Algorithme

L'équation intégrale (3.94) est résolue par un schéma itératif simple (cf Moulinec et Suquet [MOU 98] pour plus de détails)

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i+1}) = -\boldsymbol{\Gamma}^0 * (\boldsymbol{\delta}\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i)) + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.95)$$

Cette équation peut être encore simplifiée en notant que

$$\boldsymbol{\Gamma}^0 * (\mathbf{C}^0 : \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}', \quad (3.96)$$

et le schéma itératif simplifié prend la forme

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) - \boldsymbol{\Gamma}^0 * (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i)). \quad (3.97)$$

Les équations (3.92) et (3.94) sont utilisées successivement dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier et l'algorithme numérique se décompose ainsi :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Initialisation :} \\ \quad \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \forall \mathbf{x} \in V, \\ \quad \boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^0(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V, \\ \\ \text{Itération } i + 1 : \\ \quad \boldsymbol{\varepsilon}^i(\mathbf{x}) \text{ et } \boldsymbol{\sigma}^i(\mathbf{x}) \text{ connus} \\ \quad a) \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i = \mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}^i), \\ \quad b) \quad \text{Test de convergence,} \\ \quad c) \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^i(\boldsymbol{\xi}) - \hat{\boldsymbol{\Gamma}}^0(\boldsymbol{\xi}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0} \text{ et } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}(\mathbf{0}) = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \quad d) \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1}) \\ \quad e) \quad \boldsymbol{\sigma}^{i+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{i+1}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in V, \end{array} \right\} \quad (3.98)$$

où \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} désignent la transformée de Fourier et son inverse. La convergence est atteinte lorsque $\boldsymbol{\sigma}^{i+1}$ est en équilibre, typiquement lorsque

$$e^i = \frac{(\langle \|\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^i)\|^2 \rangle)^{1/2}}{\|\langle \boldsymbol{\sigma}^i \rangle\|} = \frac{(\langle \|\boldsymbol{\xi} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\boldsymbol{\xi})\|^2 \rangle)^{1/2}}{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^i(\mathbf{0})\|}, \quad (3.99)$$

est inférieur à une valeur donnée (10^{-4} dans nos calculs).

La vitesse de convergence de l'algorithme dépend du choix du milieu de référence. Le choix optimal pour un biphasé isotrope de constantes de Lamé $\lambda^{(i)}, \mu^{(i)}$, est un milieu isotrope de constantes de Lamé $\frac{1}{2}(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)})$, $\frac{1}{2}(\mu^{(1)} + \mu^{(2)})$ ([MOU 98]). Avec ce choix le nombre d'itérations à convergence est une fonction linéaire du contraste entre les phases. La méthode ne converge pas dans le cas d'un contraste infini (vides ou inclusions rigides).

3.6.4. Extension aux comportements non linéaires

La méthode par FFT peut être étendue aux comportements élastoplastiques courants. Nous ne donnerons pas de détails, renvoyant le lecteur intéressé à [MOU 98]. Pour résumer la démarche, le chargement macroscopique est appliqué incrémentalement et les champs de contrainte et de déformation sont calculés par un schéma implicite en temps. En se limitant à l'écroutissage isotrope (décrit par une variable scalaire p), on suppose connu les champs $(\boldsymbol{\sigma}_n(\mathbf{x}), \boldsymbol{\varepsilon}_n(\mathbf{x}), p_n(\mathbf{x}))$ à l'instant t_n . L'inconnue principale à l'instant t_{n+1} est $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}(\mathbf{x})$, champ de déformation compatible, auquel peut être associé par la

loi de comportement un champ de contrainte en équilibre. Le système qui en résulte pour $\varepsilon_{n+1}(\mathbf{x})$ est non linéaire. L'algorithme pour la détermination de $\varepsilon_{n+1}(\mathbf{x})$ est le suivant (pour simplifier l'indice $n + 1$ est omis, les exposants i et $i + 1$ font référence à la boucle d'itérations dans le pas) :

Itération $i+1$:

$$\left. \begin{array}{l}
 \varepsilon^i(\mathbf{x}), p^i(\mathbf{x}) \text{ et } \sigma^i(\mathbf{x}) \text{ connus} \\
 a) \quad \hat{\sigma}^i = \mathcal{F}(\sigma^i), \\
 b) \quad \text{Test de convergence,} \\
 c) \quad \hat{\varepsilon}^{i+1}(\xi) = \hat{\varepsilon}^i(\xi) - \hat{\Gamma}^0(\xi) : \hat{\sigma}^i(\xi) \quad \forall \xi \neq \mathbf{0} \text{ et } \hat{\varepsilon}^{i+1}(\mathbf{0}) = \bar{\varepsilon}, \\
 d) \quad \varepsilon^{i+1} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varepsilon}^{i+1}) \\
 e) \quad \text{Calculer } \sigma^{i+1}(\mathbf{x}), p^{i+1}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \text{ en fonction de} \\
 \varepsilon^{i+1}(\mathbf{x}), \varepsilon_n(\mathbf{x}), \sigma_n(\mathbf{x}), p_n(\mathbf{x}).
 \end{array} \right\} \quad (3.100)$$

L'étape c) est l'étape de ré-équilibrage dans laquelle l'état de déformation est ré-actualisé. L'étape e) est l'étape d'intégration locale de la loi de comportement.

3.7. Exemples

Il existe de nombreux cas tests dans la littérature pour le cas où les constituants sont élastiques linéaires (voir [GUE 90] [JAN 92] [NGU 95] entre autres). Nous présentons donc quelques exemples non linéaires.

La plupart de ces exemples sont bidimensionnels. La situation modélisée est donc celle de composites unidirectionnels dont on ne considère que la section droite. Une déformation dans la direction des fibres est cependant autorisée dans le cadre des *déformations planes généralisées* exposé dans l'annexe 3.8.1. Cette extension du cadre des déformations planes classiques est rendu nécessaire par des cas aussi simple que la traction simple dans une direction transverse. La composante $\bar{\sigma}_{33}$ de la contrainte macroscopique doit s'annuler et ceci ne peut être réalisé dans le cadre des déformations planes classiques (où $\bar{\sigma}_{33}$ est la réaction associée à la condition $\bar{\varepsilon}_{33} = 0$). En déformations planes généralisées la composante ε_{33} , supposée constante dans tout le matériau et de ce fait égale à $\bar{\varepsilon}_{33}$, est laissée libre de sorte qu'elle s'adapte pour réaliser la condition $\bar{\sigma}_{33} = 0$. La contrainte locale σ_{33} n'est pas nulle en tout point, mais l'est en moyenne sur la section droite.

3.7.1. Réseau hexagonal

Les composites considérés sont donc des biphasés composés d'une matrice renforcée par des fibres. Les fibres ont une section circulaire et sont placées aux noeuds d'un réseau hexagonal. La fraction volumique de fibres est 0.5625.

Les phases ont des propriétés élastiques identiques (comme il a été dit, ce choix est arbitraire car on se n'intéresse qu'aux contraintes d'écoulement)

$$E^{(m)} = E^{(f)} = 100 \text{ GPa}, \quad \nu^{(m)} = \nu^{(f)} = 0.25,$$

mais les fibres sont purement élastiques tandis que la matrice est élasto-plastique et obéit à une loi incrémentale avec critère de von Mises ($\sigma^{\text{eq}} \leq \sigma_0$). La contrainte d'écoulement de la matrice est $\sigma_0^{(m)} = 100 \text{ MPa}$.

Le chargement appliqué est une traction simple dans la direction transverse \mathbf{e}_θ d'inclinaison θ sur l'horizontale :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\sigma} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2. \quad (3.101)$$

La cellule unitaire utilisée avec la FFT est un rectangle et la résolution spatiale est de 256×512 pixels. Le calcul EF utilise un maillage à 11618 degrés de liberté (Figure 3.3 a). On détermine pour chaque inclinaison θ la contrainte d'écoulement $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\infty(\theta)$ par résolution du problème élasto-plastique (Figure 3.3 b).

La contrainte d'écoulement du composite dépend de l'orientation θ ce qui indique que les propriétés non linéaires d'un composite à symétrie hexagonale (dont les propriétés élastiques linéaires sont donc isotropes transverses) ne sont pas nécessairement isotropes transverses. Les deux méthodes (EF et FFT) donnent des résultats numériques très proches. Les temps CPU sont typiquement de 13 minutes pour la méthode à base de FFT et de 5 heures pour les éléments finis.

3.7.2. Pilotage en déformation ou en contrainte

Pour illustrer la différence entre pilotage en déformation et pilotage en contrainte (et l'intérêt de cette dernière approche) nous considérons une cellule carrée contenant un trou circulaire en son centre (Figure 3.4). La porosité est 0.4071. Le contraste de ce composite est infini ce qui exclut l'usage de la méthode FFT. La matrice est élastique parfaitement plastique :

$$E = 100 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.25, \quad \sigma_0 = 100 \text{ MPa}.$$

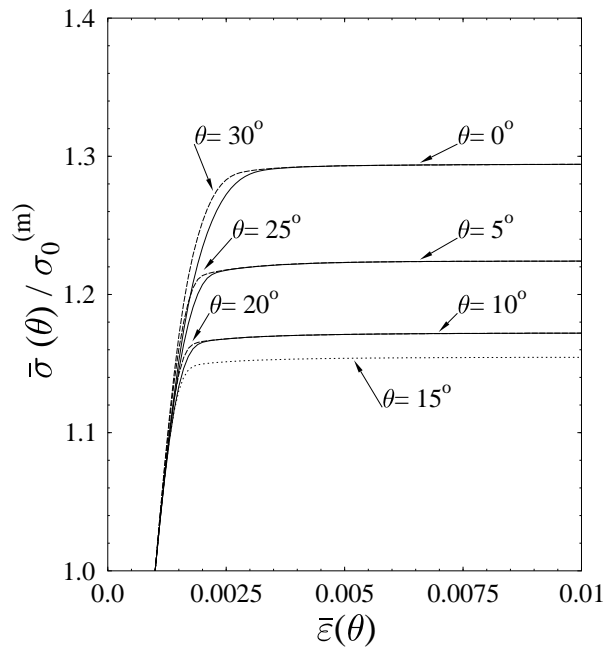
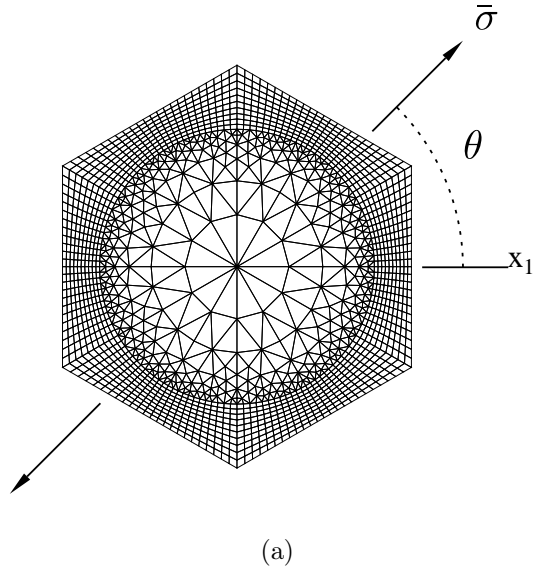


Figure 3.3. *Fibre circulaire dans une cellule hexagonale. Fraction volumique de fibres $c_f = 0.5625$. Traction uniaxiale dans le plan transverse dans une direction inclinée d'un angle θ sur l'horizontale. (a) : Maillage pour l'approche par EF. (b) Prédiction par EF des réponses contrainte-déformation pour différentes orientations de la direction de traction.*

La cellule est soumise à des contraintes dans le plan de la figure :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \bar{\sigma}_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2. \quad (3.102)$$

On notera que $\bar{\sigma}_{33}$ est égal à 0 (mais le calcul ne peut se faire en contraintes planes car σ_{33} n'est pas nul partout). La surface d'écoulement de ce composite dans le quart de plan ($\bar{\sigma}_{11} \geq 0, \bar{\sigma}_{22} \geq 0$) a été déterminée par les deux approches décrites précédemment où le pilotage s'effectue en suivant un trajet de déformation ou une direction de contrainte respectivement. On note que cette surface présente un point quasi-anguleux sur l'axe $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22}$, ce qui correspond à la non unicité des modes d'écoulement sous chargement équi-biaxial.

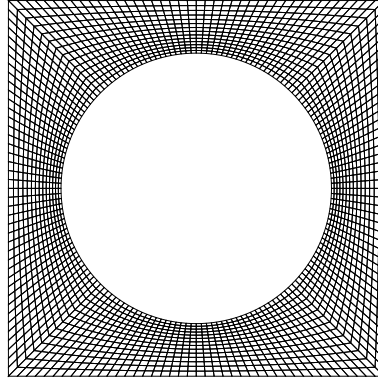
La différence entre les deux méthodes est clairement illustrée sur la Figure 3.4b par les trajets suivis par la contrainte macroscopique $(\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22})$ dans chaque calcul. Lorsqu'on pilote en déformation, ces trajets montrés en pointillés (et cercles) sur la Figure 3.4b pour différentes valeurs de la vitesse de déformation $\bar{\dot{\epsilon}}$, convergent vers le point anguleux de la surface d'écoulement (sauf lorsque $\bar{\dot{\epsilon}} = \mathbf{e}_1$ ou \mathbf{e}_2), ce qui ne permet pas une détermination de la surface entière. Au contraire lorsqu'on pilote en contrainte, les trajets sont radiaux par construction, et on peut choisir la direction dans laquelle on détermine la taille de \tilde{P} (carrés sur la Figure 3.4b). La détermination de \tilde{P} est ainsi plus précise.

3.7.3. Calculs axisymétriques/tridimensionnels

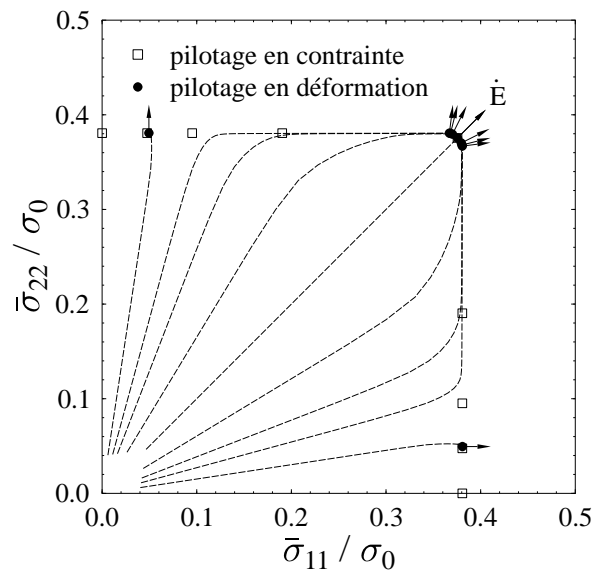
Le calcul par éléments finis des composites à renforts particuliers est souvent réalisé sur une cellule axisymétrique (Christman, Needleman et Suresh [CHR 89], Bao, Hutchinson et McMeeking [BAO 91], Tvergaard [TVE 90] entre autres). La situation que l'on souhaite modéliser est celle d'un arrangement hexagonal 3d périodique de particules alignées, Figure 3.5. Pour cet arrangement la cellule unitaire vraie est un cylindre de section hexagonale. L'approximation qui est faite pour permettre un calcul axisymétrique est la suivante : on remplace le cylindre de section hexagonale par un cylindre de même hauteur et de même volume mais de section circulaire. La qualité de cette approximation est établie dans le cas où particules et matrice ont un comportement élastique linéaire. Nous donnons ici quelques résultats de comparaison obtenus en considérant une matrice élastique parfaitement plastique, les particules restant élastiques.

De façon plus précise, la comparaison porte sur la contrainte d'écoulement effective. La matrice est élastique parfaitement plastique de von Mises de caractéristiques :

$$E^{(m)} = 100 \text{ GPa}, \quad \nu^{(m)} = 0.25, \quad \sigma_0^{(m)} = 100 \text{ MPa}.$$



(a)



(b)

Figure 3.4. Cavité circulaire dans une cellule de base carrée. Fraction volumique de vide 0.4071. Matrice élastique parfaitement plastique. Contrainte macroscopique $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \bar{\sigma}_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$. (a) : Maillage. (b) Surface d'écoulement dans le plan $(\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22})$. Carr es :  tats de contraintes situ es sur le bord de \tilde{P} d etermin es par une méthode pilotée en contrainte. Cercles :  tats de contraintes situ es sur le bord de \tilde{P} d etermin es par une méthode pilotée en déformation. Ligne pointillées : trajets suivis par la contrainte macroscopique lors d'un pilotage en déformation.

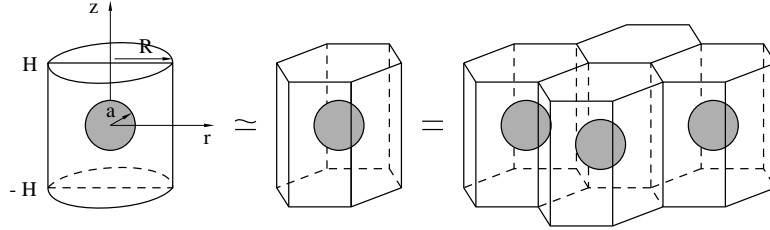


Figure 3.5. *Motivation pour une cellule axisymétrique.*

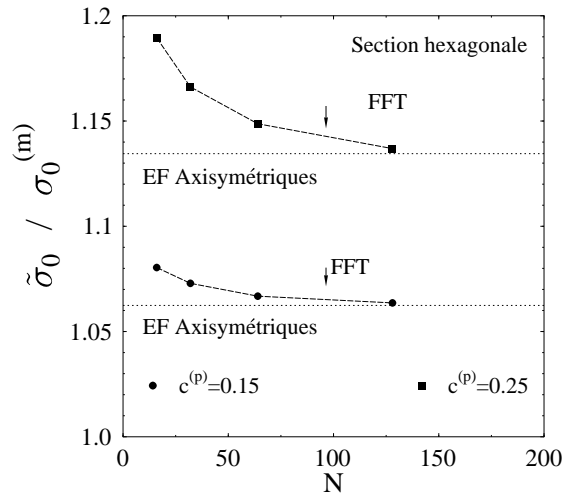
Les particules sont sphériques de propriétés élastiques identiques à celles de la matrice ($E^{(p)} = E^{(m)}$, $\nu^{(p)} = \nu^{(m)}$). La cellule (tridimensionnelle vraie ou axisymétrique) a un élancement de 1. Le composite est soumis à une traction axiale :

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_{33} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3. \quad (3.103)$$

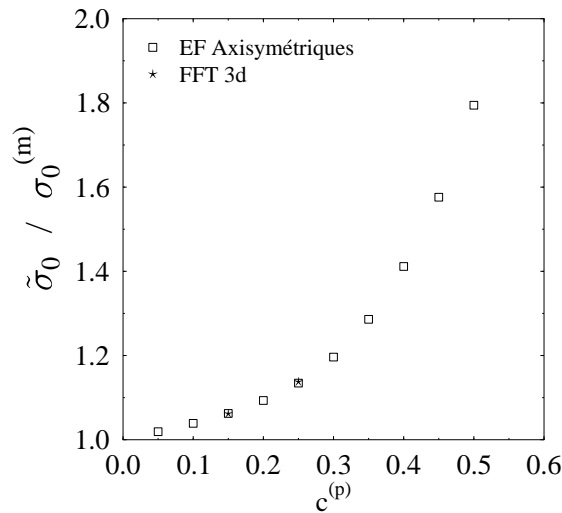
Les calculs axisymétriques ont été effectués par éléments finis pour différentes valeurs de la fraction volumique de particules. Les calculs tridimensionnels ont, quant à eux, été effectués par la méthode FFT pour deux fractions volumiques de particules ($c^{(p)} = 0.15$ et 0.25) et plusieurs résolutions spatiales. La Figure 3.6 résume les résultats obtenus.

3.7.4. Matériaux "granulaires" en loi puissance

Pour illustrer l'application de l'algorithme (3.81) aux matériaux en loi puissance, nous considérons une classe de microstructures "granulaires" définies de la façon suivante. L'espace est couvert par des hexagones réguliers. Les hexagones sont homogènes et constitués soit d'une phase 1 soit d'une phase 2, le tirage étant fait aléatoirement sous la seule condition de fractions volumiques égales pour les deux phases. Le comportement mécanique des phases est décrit par une loi puissance de même exposant m pour les deux phases, mais avec des contraintes d'écoulement σ_0 différentes. Afin de réaliser une étude statistique sur les propriétés macroscopiques de tels milieux granulaires, 25 cellules de base contenant chacune 80 hexagones ont été générées avec tirage aléatoire des phases. Ces microstructures ne présentent pas de phase privilégiée jouant le rôle d'une matrice. Un volume élémentaire de très grande taille ainsi défini simule une microstructure interchangeable idéale, où les deux phases jouent exactement le même rôle. Ces caractéristiques rappellent les hypothèses de base de la construction du schéma auto-cohérent, où aucune phase n'est privilégiée.



(a)



(b)

Figure 3.6. Contrainte d'écoulement d'un composite à renforts sphériques. Comparaison entre les calculs tridimensionnels par FFT et les calculs axisymétriques par éléments finis. (a) Influence de la résolution spatiale pour la méthode FFT. Deux fractions volumiques de renforts sont considérées, $c^{(p)} = 0.15$ et 0.25 . Le nombre total de pixels est $2 \times N^3$. (b) Évolution de la contrainte d'écoulement en fonction de la fraction volumique de renforts. Comparaison entre les deux méthodes. \square : méthode par éléments finis sur cellule axisymétrique. \star : méthode par FFT sur cellule tridimensionnelle à section hexagonale.

Les cellules sont soumises à une vitesse de déformation macroscopique de glissement simple

$$\bar{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \sqrt{3} \dot{\varepsilon}_0 \mathbf{e}_1 \otimes_s \mathbf{e}_2. \quad (3.104)$$

La contrainte d'écoulement effective est définie par

$$\tilde{\sigma}_0 = \langle \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle / \dot{\varepsilon}_0. \quad (3.105)$$

En élasticité linéaire incompressible ce problème a été considéré par Suquet and Moulinec [SUQ 97] par la méthode FFT. Ces auteurs ont constaté, pour un contraste modéré (rapport entre le module de cisaillement des phases égal à 20) un très bon accord entre la moyenne des résultats numériques obtenus et la prédiction du schéma auto-cohérent linéaire classique

$$\tilde{\sigma}_0 = \sqrt{\sigma_0^{(1)} \sigma_0^{(2)}}. \quad (3.106)$$

Cette dernière expression est exacte dans le cas d'une microstructure interchangeable (Helsing, Milton et Mochvan [HEL 97]).

Considérons maintenant le cas non linéaire ($m \neq 1$). Le problème a été abordé par la méthode des éléments finis et la condition d'incompressibilité prise en compte à l'aide de l'algorithme (3.81). Un exemple typique de maillage est donné sur la Figure 3.7 (éléments quadratiques à 8 noeuds et 4 points d'intégration). Les conditions au bord de la cellule sont des conditions de périodicité.

Les résultats obtenus pour deux valeurs du contraste entre phases, $\sigma_0^{(2)}/\sigma_0^{(1)} = 1.5$ et 5 sont présentés sur les Figures 3.8a et b pour différentes valeurs de l'exposant de non linéarité $m = 1/n$. 25 réalisations différentes ont été tirées pour la même fraction volumique des phases $c^{(1)} = c^{(2)} = 0.5$ et testées numériquement.

Pour chaque valeur de m la moyenne (sur les 25 réalisations) des résultats obtenus pour la contrainte d'écoulement $\tilde{\sigma}_0$ est notée par un cercle, tandis que la dispersion des résultats autour de cette moyenne est indiquée par une barre d'erreur. Des prédictions théoriques sont également portés sur les figures 3.8a et b : VB(HS+) désigne la borne variationnelle rigoureuse déduite de la borne supérieure de Hashin-Shtrikman (voir le chapitre 8 de cet ouvrage ou [PON 98]), VB(R) désigne la borne inférieure rigoureuse de Reuss, VE(SC) désigne l'estimation déduite de la procédure variationnelle non linéaire couplée au schéma auto-cohérent linéaire classique, NSC désigne les prédictions du schéma auto-cohérent non linéaire de Michel [MIC 98] (NSC(1) lorsque la phase 1 est la matrice et NSC(2) lorsque la phase 2 est la matrice). A faible contraste ($\sigma_0^{(2)}/\sigma_0^{(1)} = 1.5$) le développement de faible contraste de Ponte Castañeda et Suquet [PON 98] est présenté. Lorsque le contraste est plus élevé ($\sigma_0^{(2)}/\sigma_0^{(1)} = 5$),

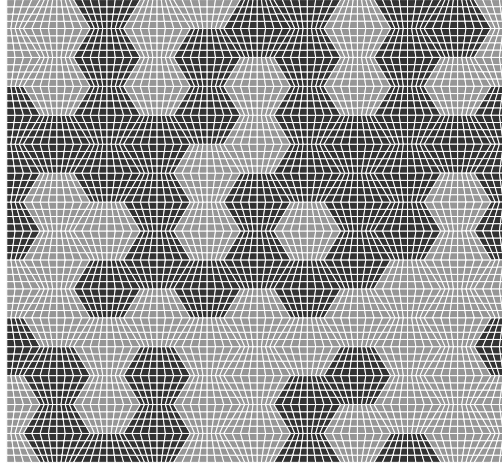
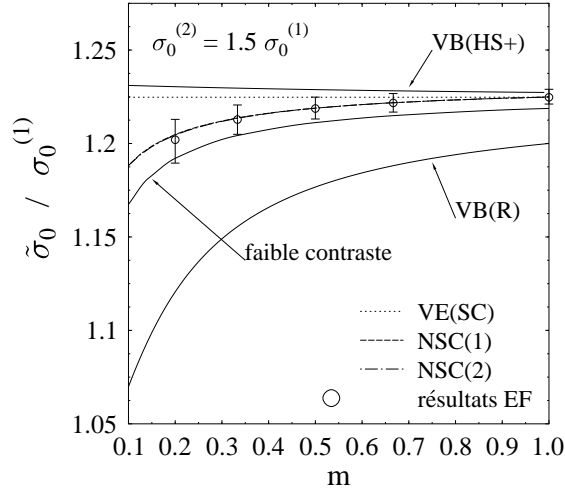


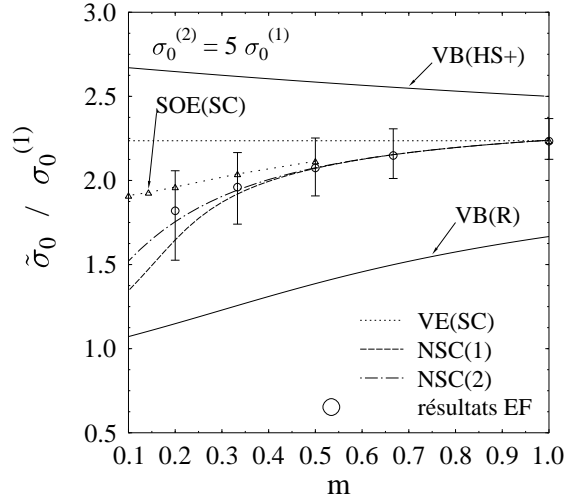
Figure 3.7. *Matériaux à structure granulaire. Maillage d'une réalisation.*

on présente les résultats de l'estimation SOE(SC) fournie par la procédure du second-ordre de Ponte Castañeda [PON 96] associée au schéma auto-cohérent linéaire.

On remarque tout d'abord que les résultats numériques et les estimations théoriques respectent les bornes rigoureuses. L'estimation VE(SC) déduite de la théorie variationnelle ne dépend pas de l'exposant m , tandis que les résultats numériques indiquent que la contrainte d'écoulement est une fonction croissante de m . A faible contraste ($\sigma_0^{(2)}/\sigma_0^{(1)} = 1.5$), les estimations auto-cohérentes NSC(1) et NSC(2) et les résultats numériques sont en bon accord avec le développement exact au second ordre. A plus fort contraste ($\sigma_0^{(2)}/\sigma_0^{(1)} = 5$), les estimations NSC(1), NSC(2) et SOE(SC) diffèrent notablement lorsque la non linéarité augmente. L'estimation du second ordre semble trop raide tandis que l'estimation NSC(1) paraît souple. L'estimation NSC(2) est en bon accord avec les simulations numériques pour toute valeur de m .



(a)



(b)

Figure 3.8. Contrainte d'écoulement plane sous glissement simple pour un matériau à structure granulaire en fonction de l'exposant de non linéarité m pour deux valeurs du contraste entre phases $\sigma_0^{(2)}/\sigma_0^{(1)} = 1.5$ et 5. Comparaison entre différentes prédictions théoriques et les simulations numériques. VB(HS+) : borne supérieure variationnelle de type Hashin-Shtrikman, VE(SC) : estimation déduite de la théorie variationnelle et du schéma auto-cohérent linéaire, NSC : schéma auto-cohérent non linéaire [MIC 98] (NSC(1) phase 1 en matrice, NSC(2) phase 2 en matrice), développement de faible contraste [PON 98], SOE(SC) : estimation déduite de la procédure du second ordre de Ponte Castañeda [PON 96], VB(R) : borne inférieure de Reuss.

3.7.5. Problème tridimensionnel : particules sphériques dans une matrice élastique

La méthode par FFT s'applique indifféremment aux problèmes bidimensionnels ou tridimensionnels sans modification majeure autre que de préciser la dimension dans la transformée de Fourier et de disposer d'une mémoire suffisante pour stocker les images. On voit l'avantage de sa souplesse sur la méthode des éléments finis.

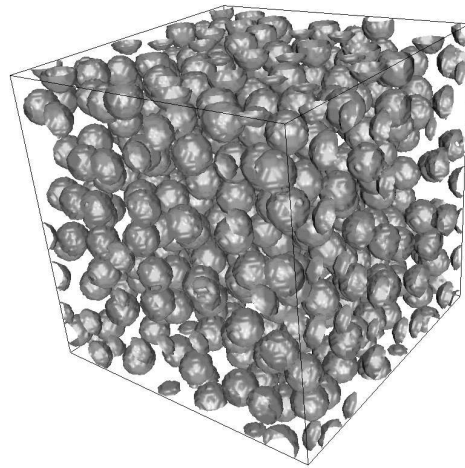
Nous avons considéré un cas traité dans la littérature par éléments finis par Gusev [GUS 97]) qui a utilisé des tétraèdres à déformation constante. Les composites considérés sont des bi-phasés constitués d'une matrice de caractéristiques

$$E^{(m)} = 3 \text{ GPa}, \quad \nu^{(m)} = 0.35,$$

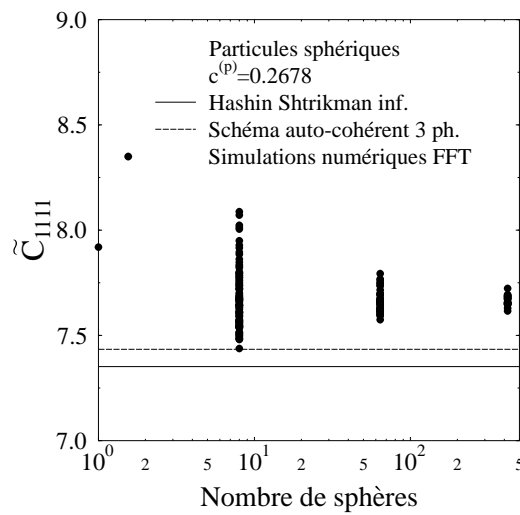
contenant des particules sphériques impénétrables de caractéristiques

$$E^{(p)} = 70 \text{ GPa}, \quad \nu^{(p)} = 0.2.$$

La cellule de base V est un cube contenant jusqu'à 420 particules identiques placées aléatoirement dans le cube (sans interpénétration). La fraction volumique de particules est $c^{(p)} = 26.78\%$. La résolution spatiale utilisée pour les calculs est égale au nombre d'inclusions $\times 32^3$. L'effet du nombre N d'inclusions ($N = 1, 8, 64, 420$) sur les propriétés élastiques macroscopiques a été étudié. Différentes réalisations ont été tirées et testées numériquement. Les résultats sont présentés sur la Figure 3.9. Le cas $N = 1$ correspond à une inclusion unique placée dans un cube (sa position importe peu, ce qui explique qu'il n'y ait qu'une seule configuration testée et un seul résultat numérique). Lorsque le nombre de particules augmente la dispersion des résultats diminue. La moyenne sur un grand nombre de réalisation à 8 particules est très proche de la moyenne sur un nombre plus faible de réalisations à 420 particules. Les résultats respectent les bornes d'Hashin et Shtrikman bien que rien ne force chaque configuration à être exactement isotrope sur le plan des propriétés élastiques ($\tilde{C}_{1111}^{HS-} = 7.3518$ GPa, $\tilde{C}_{1111}^{HS+} = 16.673243$ GPa). On constate que la cellule à une particule (qui ne conduit pas à un résultat isotrope mais à symétrie cubique pour \tilde{C}) est légèrement différent de la moyenne des résultats de simulation numérique. La borne d'Hashin-Shtrikman inférieure est une bonne approximation des résultats de simulation numérique. Le schéma auto-cohérent à 3 phases de Christensen et Lo est une approximation encore meilleure.



(a)



(b)

Figure 3.9. Composite à renfort particulaire. Particules sphériques de même rayon disposées aléatoirement dans une cellule de base cubique. Matrice élastique. Renforts élastiques. (a) : Réalisation à 420 particules. (b) Coefficient C_{1111} . \circ Résultats numériques pour différentes réalisations et différents nombres de sphères dans la cellule de base. Borne inférieure de Hashin-Shtrikman (trait continu) et schéma auto-cohérent 3 phases (trait pointillé).

Nombre de particules	Nombre de tests	\tilde{C}_{1111} (GPa) moyenne	\tilde{C}_{1111} déviation std	temps CPU (Cray C90)
1	1	7.919	-	3. s
8	101	7.675	0.142	16. s
64	40	7.664	0.054	124. s
420	21	7.667	0.024	776. s

3.8. Compléments

Ces compléments détaillent certains aspects techniques des sections 3.4 et 3.7 qui sont très utiles en pratique.

3.8.1. Déformations planes généralisées

Les composites unidirectionnels sont invariants par translation parallèlement à la direction des fibres (invariance de la géométrie et des propriétés matérielles). La cellule unitaire tri-dimensionnelle V est donc un cylindre de section droite \hat{V} (cellule unitaire de la section droite du composite) et de hauteur arbitraire dans la direction axiale \mathbf{e}_3 . Les constituants élémentaires sont supposés orthotropes (trois plans de symétrie orthogonaux) et admettent la direction axiale comme direction d'orthotropie (intersection de deux plans de symétrie). Lorsque les contraintes macroscopiques n'ont aucune composante de cisaillement anti-plane, *i.e.* lorsque

$$\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\} = \{\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{12}, \bar{\sigma}_{33}\}^T, \quad (3.107)$$

l'invariance par translation du problème peut être mise à profit pour montrer que la solution du problème local tri-dimensionnel a la forme suivante (déformations planes généralisées) :

$$u_\alpha = u_\alpha(x_1, x_2) \quad \alpha = 1, 2, \quad u_3 = \bar{\varepsilon}_{33}x_3. \quad (3.108)$$

Le problème local tri-dimensionnel peut donc être réduit à un problème local bi-dimensionnel pour les inconnues u'_α . Les quatre composantes de la déformation macroscopiques associées aux quatre composantes non nulles de la contrainte sont

$$\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \{\bar{\varepsilon}_{11}, \bar{\varepsilon}_{22}, 2\bar{\varepsilon}_{12}, \bar{\varepsilon}_{33}\}^T \quad (3.109)$$

et les inconnues à considérer sont :

$$\{\varepsilon'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{11} \\ \varepsilon'_{22} \\ 2\varepsilon'_{12} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ \bar{\varepsilon}_{33} \end{Bmatrix}, \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix}. \quad (3.110)$$

La méthode générale exposée précédemment pour les problèmes tri-dimensionnels peut être transposée au cas bi-dimensionnel après modification de la matrice $[\widehat{\mathbf{B}}]$ en

$$[\widehat{\mathbf{B}}] = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & \dots & b_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_{31} & \dots & b_{3n} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.111)$$

où les b_{ij} sont les composantes de la matrice $[\mathbf{B}]$ classique en dimension 2 et n est le nombre de degrés de liberté locaux de chaque élément. On vérifie que

$$\{\varepsilon_e\} = \{\varepsilon'_e\} + \{\bar{\varepsilon}\} = [\widehat{\mathbf{B}}] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}'_e \\ \bar{\varepsilon} \end{Bmatrix}. \quad (3.112)$$

Dans le cadre standard des déformations planes la matrice de raideur \mathbf{C} est une matrice 3×3 . En déformations planes généralisées c'est une matrice 4×4 pour tenir compte de la déformation axiale. Lorsque les phases sont isotropes de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν cette matrice de raideur s'écrit :

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 0 & c_2 \\ c_2 & c_1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ c_2 & c_2 & 0 & c_1 \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

$$c_1 = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c_2 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.114)$$

Une fois les modifications (3.110) et (3.111) effectuées, les matrices élémentaires

$$[\widehat{\mathbf{k}}_e] = \frac{1}{|V|} \int_e [\widehat{\mathbf{B}}]^T [\mathbf{C}] [\widehat{\mathbf{B}}] dx \quad (3.115)$$

sont assemblées de façon classique dans la matrice de rigidité (3.31).

3.8.2. Déformations axisymétriques

Le même formalisme s'applique aux calculs sur cellules axisymétriques avec un contrôle en déformation ou en contrainte. La "cellule unitaire" est un cylindre

à base circulaire soumis à des contraintes ou déformations macroscopiques axisymétriques

$$\{\bar{\boldsymbol{\sigma}}\} = \{\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}\}^T, \quad \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\} = \{\bar{\varepsilon}_{11} = \bar{\varepsilon}_{22}, \bar{\varepsilon}_{33}\}^T. \quad (3.116)$$

Le champ de déplacement solution du problème local est axisymétrique :

$$u_r = \bar{\varepsilon}_{11}r + u'_r(r, z), \quad u_\theta = 0, \quad u_z = \bar{\varepsilon}_{33}z + u'_z(r, z). \quad (3.117)$$

Les relations (3.110) et (3.111) prennent la forme

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}'\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{rr} \\ \varepsilon'_{zz} \\ 2\varepsilon'_{rz} \\ \varepsilon'_{\theta\theta} \end{Bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon'_{rr} + \bar{\varepsilon}_{11} \\ \varepsilon'_{zz} + \bar{\varepsilon}_{33} \\ 2\varepsilon'_{rz} \\ \varepsilon'_{\theta\theta} + \bar{\varepsilon}_{11} \end{Bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta\theta} \end{Bmatrix}, \quad (3.118)$$

$$[\hat{\mathbf{B}}] = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} & 1 & 0 \\ b_{21} & \dots & b_{2n} & 0 & 1 \\ b_{31} & \dots & b_{3n} & 0 & 0 \\ b_{41} & \dots & b_{4n} & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.119)$$

3.8.3. Contrôle des contraintes

Il n'est pas toujours possible d'implémenter la formulation à contrainte imposée (3.50) dans un code numérique. La formulation à déformation imposée (plus classique puisqu'elle s'apparente à un problème de déformation thermique) peut être utilisée itérativement pour réaliser le contrôle des contraintes. L'algorithme itératif s'écrit plus précisément :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Initialisation : } \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^0 = \langle \mathbf{C} \rangle^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \\ \text{Itération } i+1 : \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^i \text{ connu} \\ \quad a) \quad \text{Résoudre le problème local à déformation imposée } \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^i : \\ \quad \quad \text{solution } \boldsymbol{\sigma}^i, \mathbf{u}^i, \\ \quad b) \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^i + \langle \mathbf{C} \rangle^{-1} : (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \langle \boldsymbol{\sigma}^i \rangle), \\ \quad c) \quad \text{Test de convergence.} \end{array} \right\} \quad (3.120)$$

La convergence est atteinte lorsque $\langle \boldsymbol{\sigma}^i \rangle = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{i+1} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^i$.

Dans les problèmes fortement non linéaires il est même souvent nécessaire de n'imposer que la *direction* de contrainte macroscopique et de contrôler un paramètre de chargement moins sensible que le niveau de contrainte (méthode de longueur d'arc) :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = k \boldsymbol{\sigma}^0 \quad \text{et} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma}^0 = t, \quad (3.121)$$

où σ^0 est la direction de contrainte macroscopique imposée (dans l'espace de dimension 6 des contraintes), k est le niveau (inconnu) de contrainte et t , le paramètre de chargement et la composante de la déformation dans la direction de contrainte imposée. L'algorithme (3.120) doit alors être modifié en remplaçant $\bar{\sigma}$ par $k\sigma^0$ à l'étape b), où k est déterminée par la condition $\bar{\varepsilon} : \sigma^0 = t$. L'algorithme modifié s'écrit :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Initialisation : } \quad \bar{\varepsilon}^0 \text{ connu,} \\
 \text{Itération } i+1 : \quad \bar{\varepsilon}^i \text{ et } t \text{ connus} \\
 \quad a) \quad \text{Résoudre le problème local à déformation imposée } \bar{\varepsilon}^i : \\
 \quad \quad \text{solution } \sigma^i, u^i, \\
 \quad b) \quad k^{i+1} = \frac{t + \sigma^0 : (\langle C \rangle^{-1} : \langle \sigma^i \rangle - \bar{\varepsilon}^i)}{\sigma^0 : \langle C \rangle^{-1} : \sigma^0} \\
 \quad c) \quad \bar{\varepsilon}^{i+1} = \bar{\varepsilon}^i + \langle C \rangle^{-1} (k^{i+1} \sigma^0 - \langle \sigma^i \rangle) \\
 \quad d) \quad \text{Test de convergence.}
 \end{array} \right\} \quad (3.122)$$

La convergence est atteinte lorsque $\bar{\varepsilon}^{i+1} = \bar{\varepsilon}^i$.

Références

- [ADA 67] D.F. ADAMS AND D.R. DONER. Transverse normal loading of a unidirectional composite. *J. Comp. Mat.*, **1**:152, 1967.
- [ANT 95] A. ANTHOINE. Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory. *Int. J. Solids Structures*, **32**:137–163, 1995.
- [BAO 91] G. BAO, J.W. HUTCHINSON AND R.M. McMEEKING. Particle reinforcement of ductile matrices against plastic flow and creep. *Acta Metall. Mater.*, **39**:1871–1882, 1991.
- [BEN 88] M.P. BENDSOE AND N. KIKUCHI. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **71**:197–224, 1988.
- [BEN 78] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS AND G. PAPANICOLAOU. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland, 1978.
- [BOU 77] J.F. BOURGAT. Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients. In R. GLOWINSKI AND J.L. LIONS, eds, *Computing methods in applied sciences and engineering*, volume **704** of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 330–356. Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [BRO 91] J.R. BROCKENBOROUGH, S. SURESH AND H.A. WIENECKE. Deformation of metal-matrix composites with continuous fibers: geometrical effects of fiber distribution and shape. *Acta Metall. Mater.*, **39**:735–752, 1991.
- [CHR 89] T. CHRISTMAN, A. NEEDLEMAN AND S. SURESH. An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. *Acta Metall. Mater.*, **37**:3029–3050, 1989.
- [CRI 91] M.A. CRISFIELD. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Wiley, Chichester, 1991.

- [DEB 85] O. DEBORDES, C. LICHT, J.J. MARIGO, P. MIALON, J.C. MICHEL ET P. SUQUET. Calcul des charges limites de structures fortement hétérogènes. In J.P. GRELLIER, ed, *Tendances actuelles en Calcul des Structures*, pages 56–70. Pluralis, 1985.
- [DEB 91] P. DE BUHAN AND A. TALIERCIO. A homogenization approach to the yield strength of composites. *European J. Mechanics: A/ Solids*, **10**:129–154, 1991.
- [DEB 95] P. DE BUHAN AND S. MAGHOUS. A straightforward numerical method for evaluating the ultimate loads of structures. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **14**:309–328, 1995.
- [DEV 89] F. DEVRIES, H. DUMONTET, G. DUVAUT AND F. LÉNÉ. Homogenization and damage for composite structures. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **27**:285–298, 1989.
- [FRA 97] P. FRANCESCATO AND J. PASTOR. Lower and upper numerical bounds to the off-axis strength of unidirectional fiber-reinforced composites by limit analysis methods. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **16**:213–234, 1997.
- [GUE 90] J.M. GUEDES AND N. KIKUCHI. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptative finite element methods. *Comput. Meths Appl. Mech. Engng.*, **83**:143–198, 1990.
- [GUS 97] A.A. GUSEV. Representative volume element size for elastic composites: a numerical study. *J. Mech. Phys. Solids*, **45**:1449–1459, 1997.
- [HEL 97] J. HELSING, G.W. MILTON AND A.B. MOVCHAN. Duality relations, correspondences and numerical results for planar elastic composites. *J. Mech. Phys. Solids*, **45**:565–590, 1997.
- [HIL 67] R. HILL. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, **15**:79–95, 1967.
- [JAN 92] S. JANSSON. Homogenized nonlinear constitutive properties and local stress concentrations for composites with periodic internal structure. *Int. J. Solids Structures*, **29**:2181–2200, 1992.
- [MAR 87] J.J. MARIGO, P. MIALON, J.C. MICHEL ET P.SUQUET. Plasticité et homogénéisation : un exemple de prévision des charges limites d’une structure périodiquement hétérogène. *J. Méca. Th. Appl.*, **6** :47–75, 1987.
- [MIC 98] J.C. MICHEL. A self-consistent estimate of the non-linear properties of isotropic two-phase composites. *Composites Science and Technology*, **58**:753–758, 1998.
- [MOU 94] H. MOULINEC AND P. SUQUET. A fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites. *C. R. Acad. Sc. Paris II*, **318**:1417–1423, 1994.
- [MOU 95] H. MOULINEC AND P. SUQUET. A FFT-based numerical method for computing the mechanical properties of composites from images of their microstructure. In R. PYRZ, ed, *Microstructure-Property Interactions in Composite Materials*, pages 235–246. Kluwer Academic Pub., 1995.
- [MOU 98] H. MOULINEC AND P. SUQUET. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **157**:69–94, 1998.
- [MUL 96] W.H. MÜLLER. Mathematical versus experimental stress analysis of inhomogeneities in solids. *J. Physique IV*, **6**:C1.139–C1–148, 1996.

- [MUR 87] T. MURA. *Micromechanics of Defects in Solids*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1987.
- [NEE 72] A. NEEDLEMAN. Void growth in an elastic plastic medium. *J. Appl. Mech.*, **39**:964–970, 1972.
- [NGU 95] H.V. NGUYEN, J. PASTOR AND D. MULLER. A method for predicting linear viscoelastic mechanical behavior of composites, a comparison with other methods and experimental validation. *Eur. J. Mech., A/Solids*, **14**:939–960, 1995.
- [PON 96] P. PONTE CASTAÑEDA. Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, **44**:827–862, 1996.
- [PON 98] P. PONTE CASTAÑEDA AND P. SUQUET. Nonlinear composites. In E. VAN DER GIESSEN AND T.Y. WU, eds, *Advances in Applied Mechanics*, **34**:171–302. Academic Press, New York, 1998.
- [SAL 83] J. SALENÇON. *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'ENPC, Paris, 1983.
- [SAN 74] E. SANCHEZ-PALENCIA. Comportement local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes. *Int. J. Eng. Sc.*, **12** :331–351, 1974.
- [SAN 80] E. SANCHEZ-PALENCIA. *Nonhomogeneous media and vibration theory*, volume **127** of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, 1980.
- [SIM 86] J.C. SIMO AND R.L. TAYLOR. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **24**:649–670, 1986.
- [SUQ 83] P. SUQUET. Analyse limite et homogénéisation. *C.R. Acad. Sc. Paris, II*, **296** :1355–1358, 1983.
- [SUQ 87] P. SUQUET. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In E. SANCHEZ-PALENCIA AND A. ZAOUÏ, eds, *Homogenization Techniques for Composite Media*, volume **272** of *Lecture Notes in Physics*, pages 193–278. Springer Verlag, 1987.
- [SUQ 97] P. SUQUET AND H. MOULINEC. Numerical simulation of the effective properties of a class of cell materials. In K.M. GOLDEN, G.R. GRIMMETT, R.D. JAMES, G.W. MILTON AND P.N. SEN, eds, *Mathematics of multiscale materials*, volume **99** of *IMA Lecture Notes*, pages 277–287. Springer-Verlag, 1997.
- [TAL 95] A. TALIERCIO AND P. SAGRAMOSO. Uniaxial strength of polymeric-matrix fibrous composites predicted through a homogenization approach. *Int. J. Solids Struct.*, **32**:2095–2123, 1995.
- [TAR 77] L. TARTAR. Estimations de coefficients homogénéisés. In R. GLOWINSKI AND J.L. LIONS, eds, *Computing methods in applied sciences and engineering*, volume **704** of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 364–373. Springer Verlag, Berlin, 1977.
- [TVE 90] V. TVERGAARD. Analysis of tensile properties for a whisker–reinforced metal-matrix composite. *Acta Metall. Mater.*, **38**:185–194, 1990.

