

Physique des sons et vibrations

Philippe Herzog

Mail : herzog@lma.cnrs-mrs.fr - Tel : 04 91 16 40 89

Adnane Boukamel

Mail : adnane.boukamel@ec-marseille.fr - Tel : 04 91 05 43 90

Suite / polycopié de Jean-Pierre Lefebvre



Physique des sons et vibrations

- C1 : Propagation : principe et applications
- C2 : Ondes sonores en fluide non dissipatif
- C3 : Ondes élastiques dans les solides
- C4 : Dissipation dans les solides
- C5 : Sources et dissipation acoustiques
- C6 : **Interface solide/fluide, couche limite**

Equations non isentropiques, linéarisées autour de $\{P_0, T_0, \vec{v}_0 = \vec{0}\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = q_m \quad [kg.m^{-3}.s^{-1}] \quad (C1) \\ \rho_0 \partial_t \vec{v} - \vec{\nabla} : \bar{\sigma} = \vec{F} \quad [N.m^{-3}] \quad (C2) \\ T \rho \dot{s} - (\bar{\tau} : \dot{\bar{\epsilon}}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q} = r \quad [W/m^3] \quad (CE3) \\ 2\mu \dot{\bar{\epsilon}} + \lambda (\text{tr} \dot{\bar{\epsilon}}) \bar{\mathbf{I}} = \bar{\tau} \quad [Pa] \quad (T1) \\ -\kappa \vec{\nabla} T = \vec{q} \quad [W/m^2] \quad (T2) \end{array} \right.$$

3 eq. de conservation (1 combinée/eq. d'état) + 2 équations de transport

Propagation avec dissipation, en fluide homogène, isotrope, au repos

Sans termes "source" et linéarisées au premier ordre

Opérateur commun : $[\Delta + k_{a/v/h}^2]$

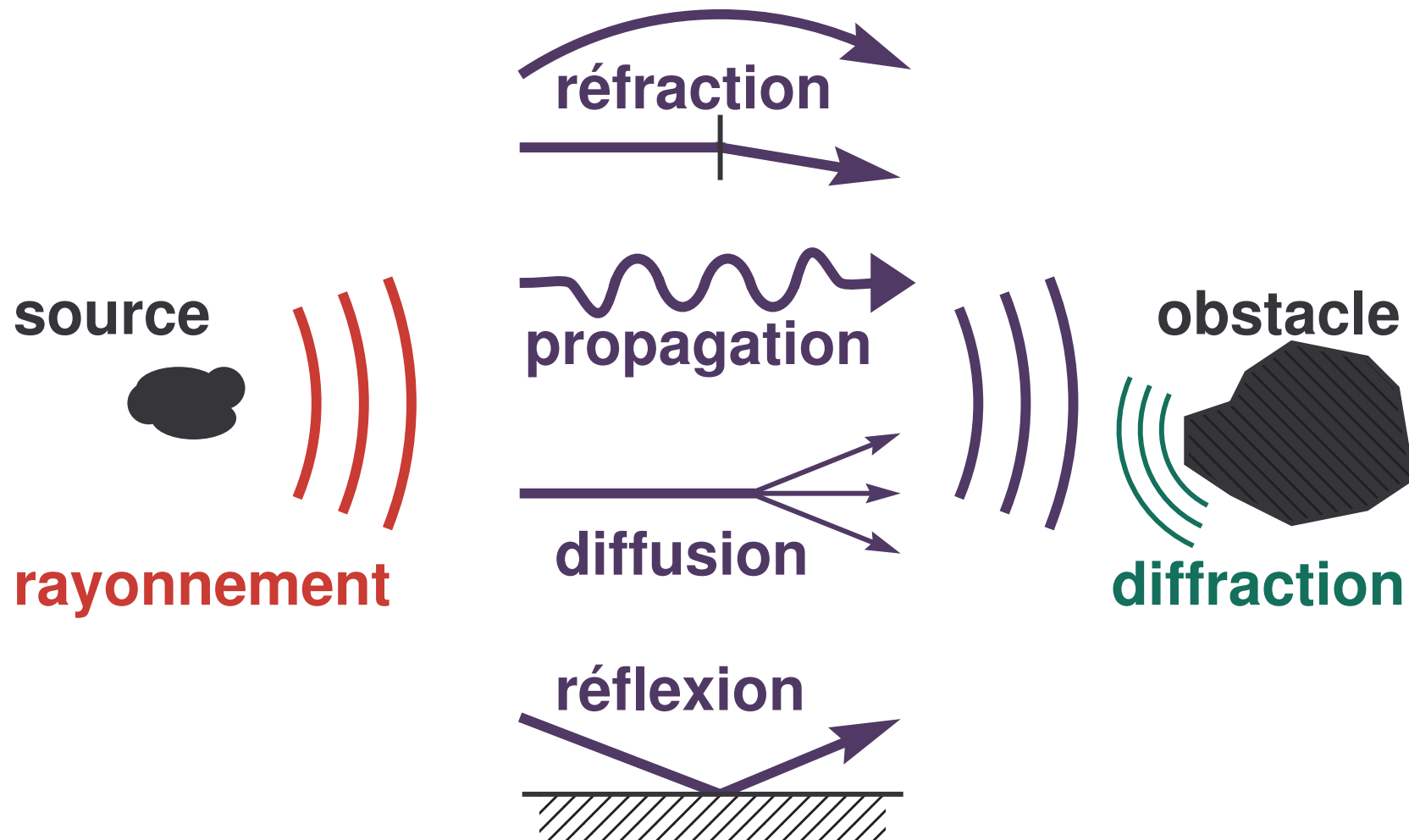
$$\begin{cases} k_a^2 &= k_0^2 (1 - jk_0 \ell_{vh}) \\ k_h^2 &= -\frac{j\omega}{c_0 \ell_h} \\ k_v^2 &= -\frac{j\omega}{c_0 \ell'_v} \end{cases}$$

Solutions avec dépendance $e^{j\omega t - jk_{xx}r}$:

Propagation = déphasage + légère absorption/dispersion

Diffusion = absorption rapide + dispersion marquée

Peu d'influence sur la propagation à échelles "courantes"



Propagation acoustique

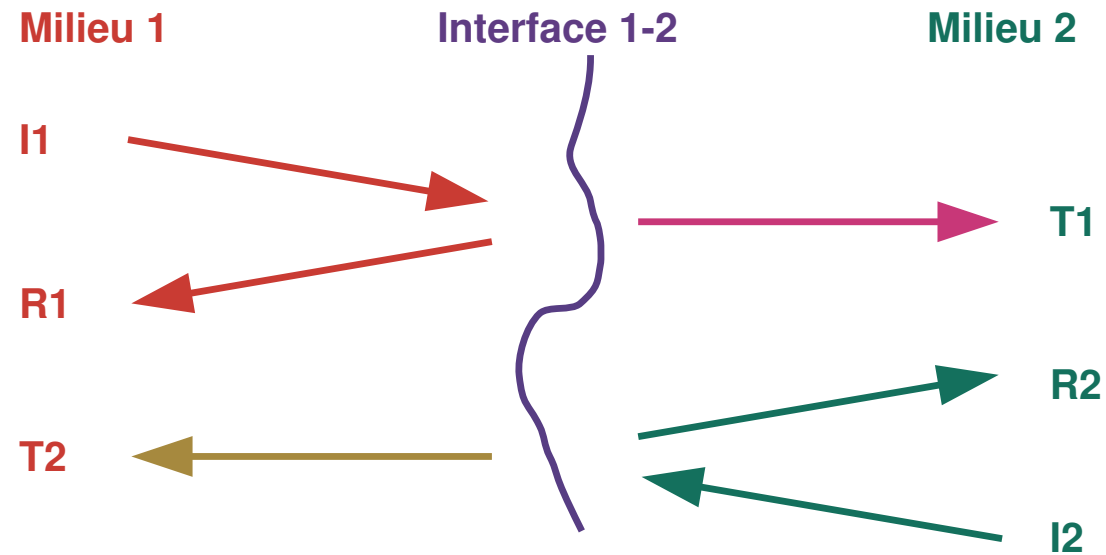
- Isentropique, ou légère atténuation
- Paramètres $\{c_0, Z_c\}$ "constants" (ou loi)
- Caractérisée par une variable unique (p)

⇒ "onde" (générique)

Modification du milieu

- Changement de milieu ou d'hypothèses = interface
- Obstacle $L \gtrsim \lambda$ = diffraction
- Obstacles $L \ll \lambda$ = diffusion, milieu "équivalent"
- Paroi, sol = réflexion (spéculaire, diffuse, etc), écho, réverbération

⇒ Conditions aux limites



Surface de transition

- Milieux différents (réfraction)
- Bornes d'un domaine de calcul
- Hypothèses de calcul différentes

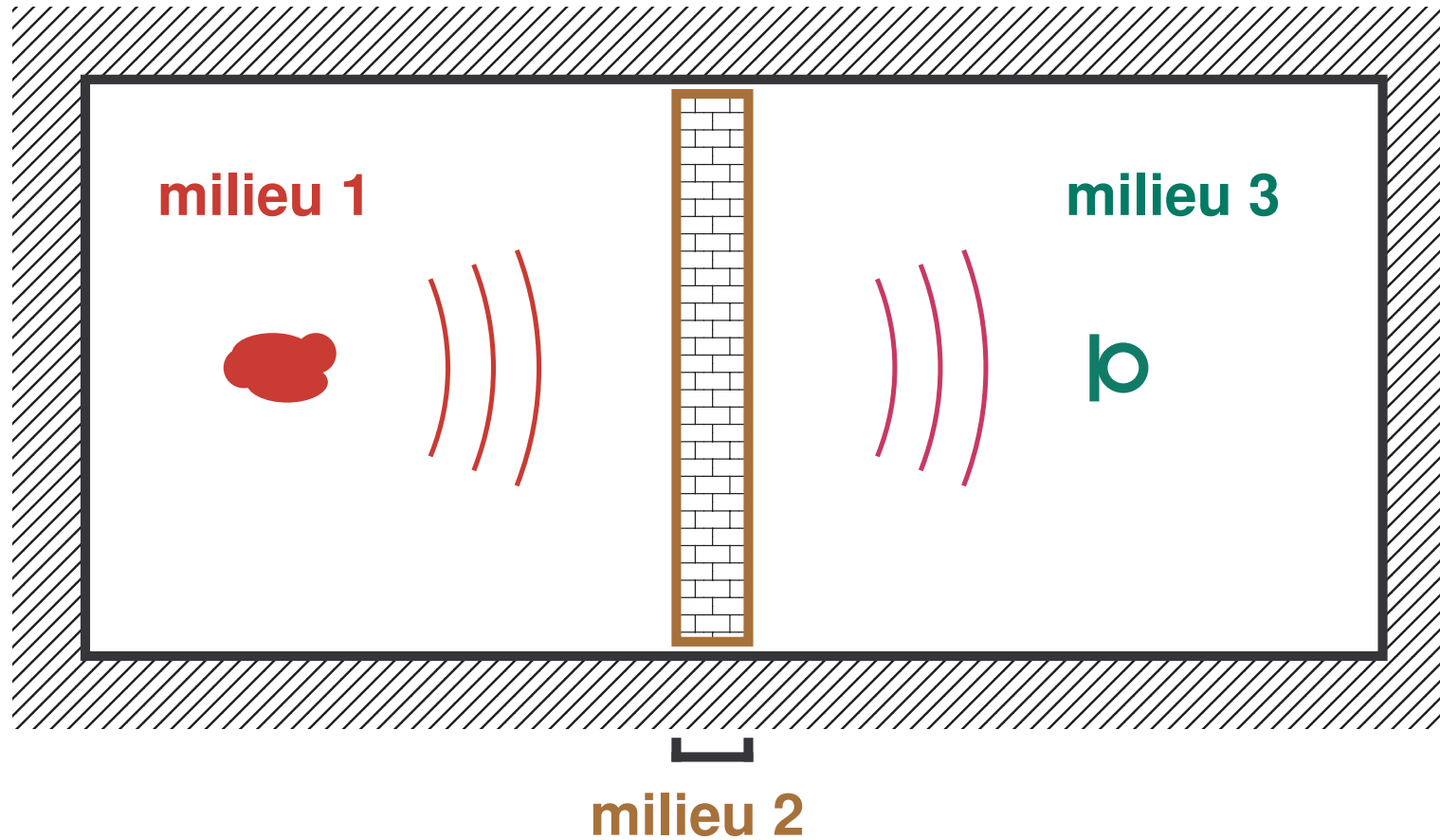
⇒ Relation(s) de (dis)continuité



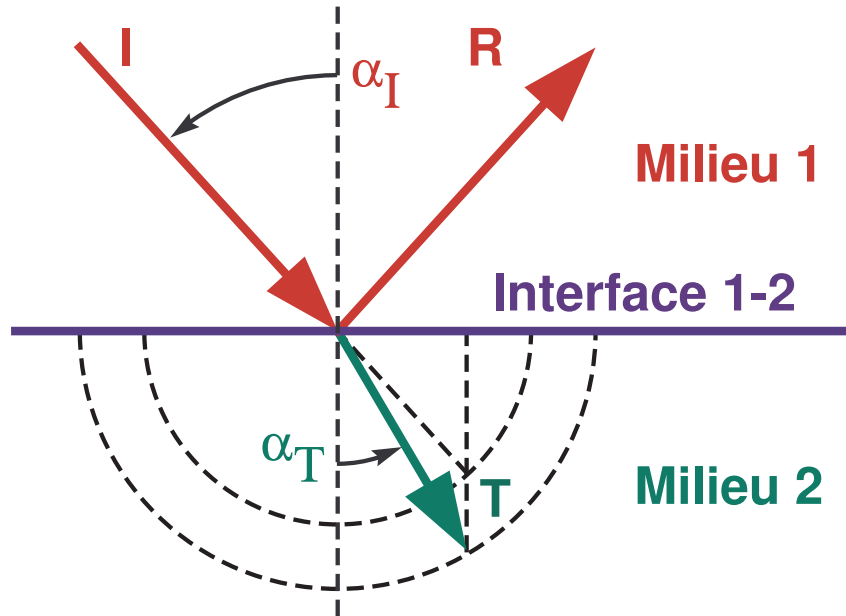
Propriété fondamentale

- Commune à la mécanique, l'électromagnétisme, etc
- Expression bien plus générale (2 situations)
- Echange des rôles, pas des objets !
- Propriété locale (\approx / petits éléments)

\Rightarrow Simplification calculs et mesures



Calcul couplé dans n domaines \Rightarrow rapidement [trop] complexe



Interface simple :

- Interface plane
- Changement d'indice : $n_i = \frac{c_0}{c_i}$
- Onde incidente plane
- Réaction = deux ondes planes

Relation de Snell-Descartes $c_2 \sin(\alpha_1) = c_1 \sin(\alpha_2)$

Angle "limite" si $c_2 > c_1$: incidence critique \Rightarrow réflexion totale

Calcul couplé possible facilement car problème très symétrique

\Rightarrow Acoustique "géométrique" (rayons, cônes, etc)

Condition de Neumann

- Cas limite "parfaitement rigide"
- Expression simple : $\partial_n p = 0$
- Pas de puissance transmise

Condition de Dirichlet

- Cas limite "parfaitement souple"
- Expression simple : $p = 0$
- Pas de puissance transmise

Condition de Sommerfeld

- Cas limite "parfaitement absorbant"
- Expression : $\lim_{R \rightarrow \infty} R \left[\frac{\partial}{\partial R} + jk \right] p(\vec{\mathbf{r}}) = 0$
- Puissance totalement transmise

Interfaces "virtuelles" (non physiques) utilisées pour "fermer" un problème

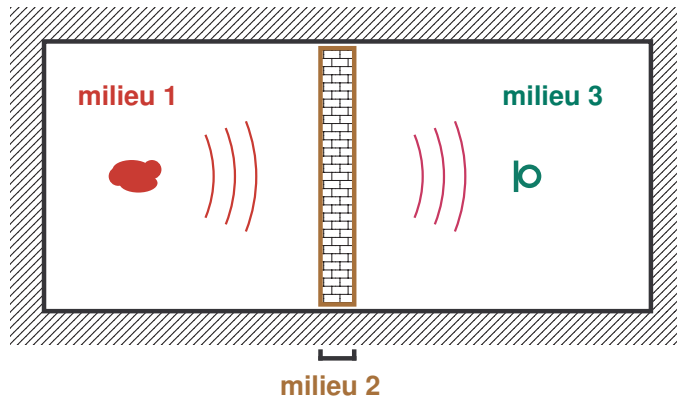
Onde plane harmonique

- Cas limite $\{R, \omega\}$, élémentaire
- Propagation selon \vec{n}_0 , invariante $\perp \vec{n}_0$
- Pression $p(\vec{M}) = p_a e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{M})}$
- Vitesse $\vec{v} = \frac{-1}{j\omega\rho_0} \vec{\nabla} p = \frac{jk}{j\omega\rho_0} p \vec{n}_0 = v \vec{n}_0$

$$\Rightarrow \text{Impédance caractéristique } Z_c = \frac{p}{v} = \rho_0 c_0 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}]$$

Impédance "électroacoustique" $[\text{kg} \cdot \text{m}^{-4} \cdot \text{s}^{-1}]$

- Exprimée en fonction de $\{p, Q\}$ où $Q \equiv [m^3/s]$ donc $pQ \equiv [W]$
- Associée à l'intensité $\vec{I} = p \vec{v}$ traversant une surface δS
- Forme générale : $Z_{ij} = p_j / Q_i$ avec deux "éléments" $\{\delta S_i, \delta S_j\}$
- Locale (distribution de débit $Q_i \delta_{\vec{M}, \vec{M}_i}$) ou surfacique
- Généralisable à de multiples formes d'énergie (transduction, analogies)



Problème couplé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Equations milieu 1} = T_{12} \quad (\text{dans } V_1) \\ \text{Equations milieu 2} = T_{23} - T_{12} \quad (\text{dans } V_2) \\ \text{Equations milieu 3} = -T_{23} \quad (\text{dans } V_3) \end{array} \right.$$

Formulation impédance :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 = \dots \quad (\text{sur } S_{12}) \\ Z_3 = \dots \quad (\text{sur } S_{23}) \\ \text{Equations milieu 2} = \text{fonction}(Z_1, Z_3) \quad (\text{dans } V_2) \end{array} \right.$$

Opérateur remplaçant les termes de transport

Un opérateur pour chaque face de l'interface

Lien entre tous les points de l'interface

⇒ Résolution limitée à un seul problème (cf FEM+BEM)

Condition LOCALE en chaque point de l'interface

$$\left\{ \begin{array}{l} p/v_n = Z \quad (\text{normale sortante}) \\ \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} p = 0 \end{array} \right.$$

Condition aux limites "mixte" :

$$(\partial_n + jk \frac{Z_c}{Z}) p = 0 \quad [\text{kg.m}^{-2}.\text{s}^{-2}]$$

Valeurs limites de $Z \Rightarrow$ Neumann ou Dirichlet - PAS Sommerfeld

Z scalaire \Rightarrow pas de condition de continuité transversale

Intensité transmise : $\mathbf{I}_n = p^2 / \Re(Z) \geq 0$ (passif)

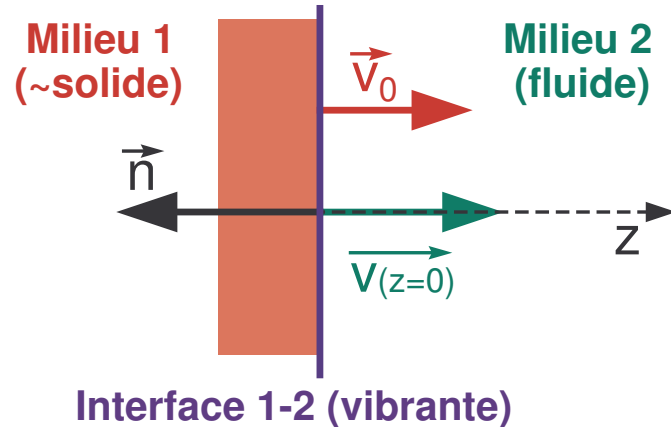
Coefficient de réflexion dépendant de l'incidence

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Incidente : } p_i e^{j\omega t - jk \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_0} \quad \text{avec } \vec{\mathbf{n}}_0 \cdot \vec{\mathbf{n}} = \cos \theta \\ \text{Réfléchie : } p_r e^{j\omega t - jk \vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_0'} \quad \text{avec } \vec{\mathbf{n}}_0' \cdot \vec{\mathbf{n}} = -\cos \theta \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Amplitude réfléchie : } r_p = \frac{p_r}{p_i} = \frac{-1 + \frac{Z}{Z_c} \cos \theta}{1 + \frac{Z}{Z_c} \cos \theta} \\ \text{Intensité transmise : } T = 1 - \|r_p\|^2 = \frac{4\Re(\frac{Z}{Z_c}) \cos \theta}{[1 + \Re(\frac{Z}{Z_c}) \cos \theta]^2 + [\Im(\frac{Z}{Z_c}) \cos \theta]^2} \end{array} \right.$$

Impédance caractéristique $Z = Z_c$: $T = \frac{4 \cos \theta}{[1 + \cos \theta]^2} \xrightarrow[\theta \rightarrow 0]{\perp} 1$

Pas anéchoïque hors incidence normale (\Rightarrow BEM ou éventuellement IFEM)



Réaction localisée :

- Pas de vibration transversale significative
- Impédance de surface $Z = p(z = 0) / [v_0 - v(z = 0)]$
- Normale sortante et fluide en $z > 0$

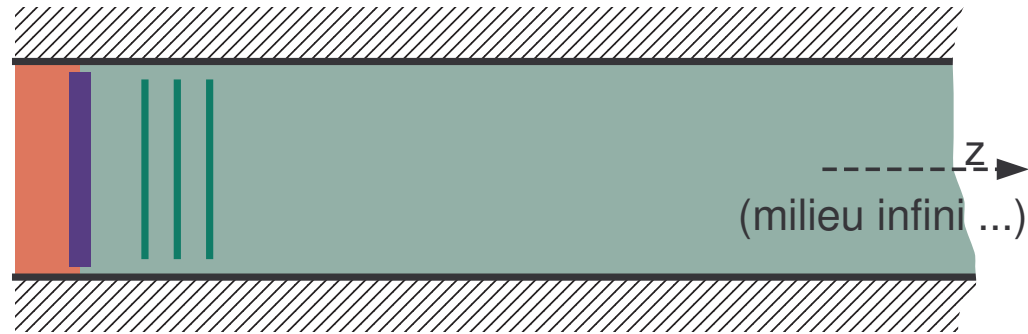
Condition aux limites mixte "inhomogène" :

$$\left(\partial_n + jk \frac{Z_c}{Z}\right) p = j\omega \rho_0 v_0 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-2}]$$

Approximation physique : réaction localisée, v_0 exprimée en $z = 0$

Implique un couplage réciproque : v_0 dépendant de p

Intensité transmise : $\mathbf{I}_n = p^2 / \Re(Z) - \Re(pv_0)$ dépend de p



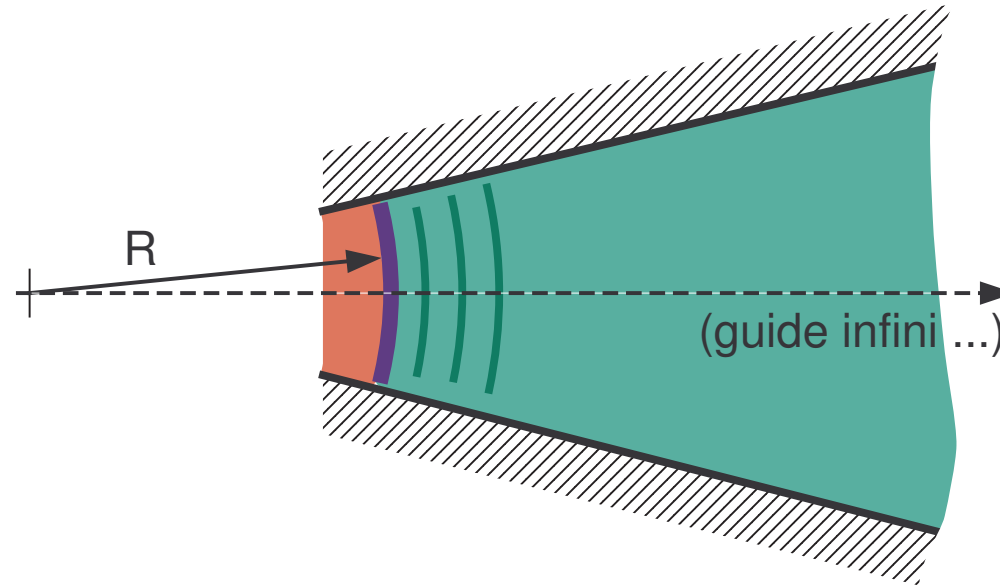
Propagation 1D :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \partial_t p + \partial_z v_z = 0 \\ \rho_0 \partial_t v_z + \partial_z p = 0 \end{cases}$$

Solution = onde plane

$$\begin{cases} p = p_0 e^{-jkz} \\ v_z = \frac{jk}{j\omega \rho_0} p_0 e^{-jkz} \end{cases}$$

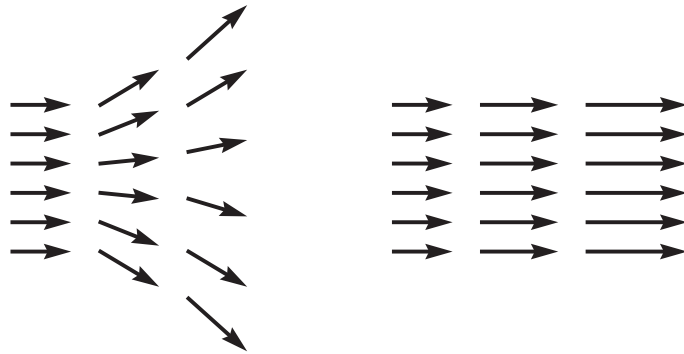
Impédance présentée = impédance "itérative" $Z = Z_c / S$



Solution = onde sphérique

$$\begin{cases} p &= \frac{p_0}{R} e^{-jkR} \\ v_R &= \frac{[jk + \frac{1}{R}]}{j\omega\rho_0} \frac{p_0}{R} e^{-jkR} \end{cases}$$

Impédance présentée $Z = \frac{Z_c}{S} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{(kR)^2}} + \frac{jkR}{\|1 + jkR\|^2} \right]$



$$\begin{cases} \chi_s \partial_t p + \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho_0 \partial_t \vec{v} + \vec{\nabla} p = 0 \end{cases}$$

Influence de la géométrie environnante :

- Variations milieu, C.L. \Rightarrow géométrie trajectoires : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$
- Pression résultante perturbée $\Rightarrow \vec{\nabla} p$
- Rééquilibrage de la pression "de proche en proche" \Rightarrow orientation \vec{v}

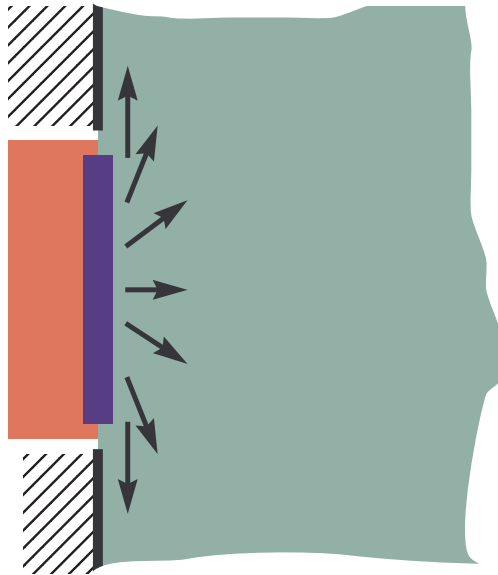
Modification de la réaction présentée par le fluide

Onde non plane : déséquilibre vitesse/pression

Excès local d'énergie cinétique ou potentielle

Correspond à $\Im(Z)$ avec réduction de $\Re(Z)$

\Rightarrow Champ "évanescent", ou "champ proche"



Rupture de géométrie :

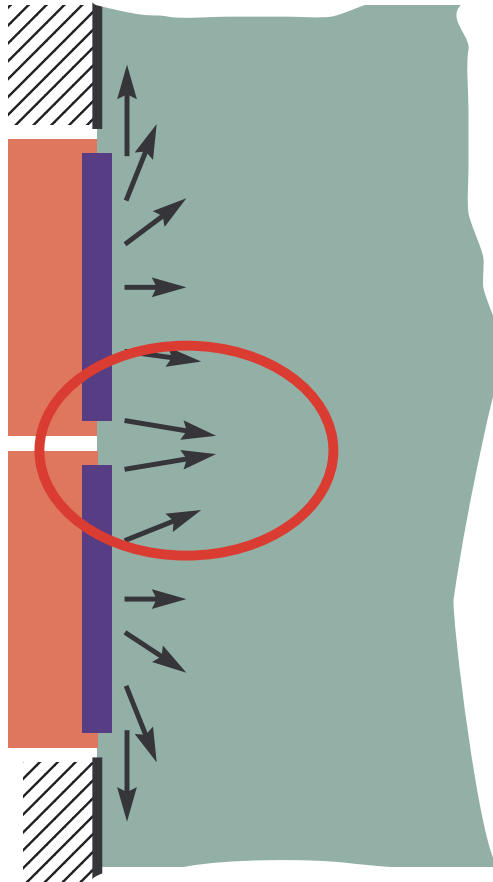
- Vitesse normale sur le plan
- Pas de continuité transversale
- Section latérale \gg frontale
- Vitesse \rightarrow hémisphérique dans le fluide

Débit imposé par le mouvement du piston

Fluide environnant entraîné sans compression

Faible transmission de la puissance ($ka \ll 1$)

Impédance présentée \Leftrightarrow masse d'air entraînée



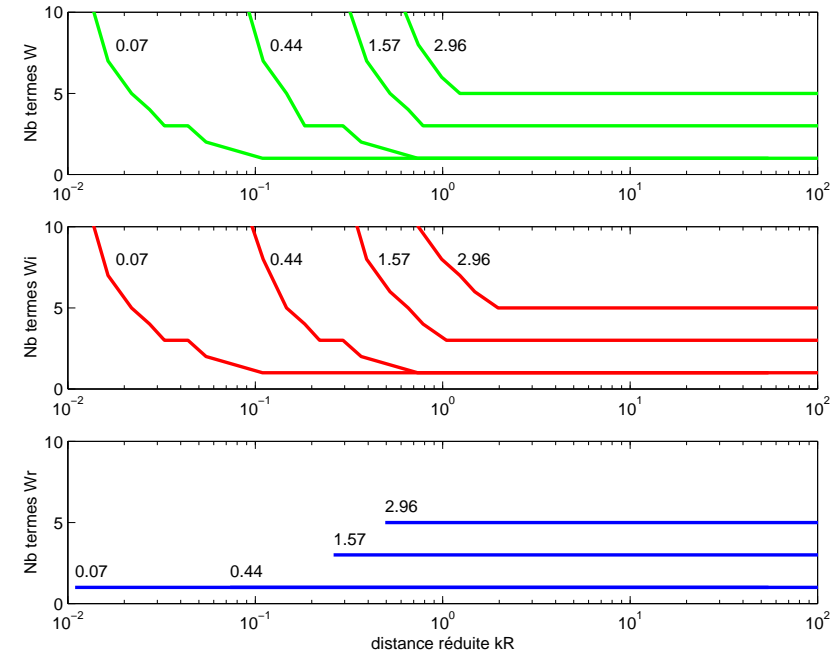
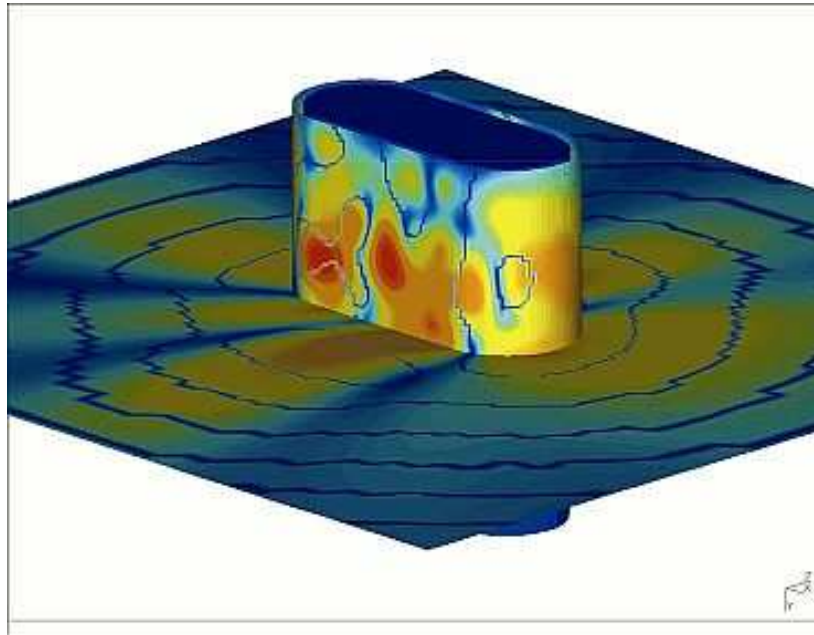
Rayonnement coopératif :

- Vitesse modifiée entre les pistons
- Meilleure efficacité si en phase
- Annulation si opposition
- Couplage mutuel essentiel

Transfert d'énergie :

- Terme propre + termes d'interaction
- Majoré par $Z = Z_c$
- Proportion = "efficacité de rayonnement"

Impédance matricielle (discrétisation d'une solution intégrale)



Rayonnement - propagation

Complexité \approx confinée près de sa source

Propagation = ré-équilibrage progressif

Champ lointain \approx sphérique

C.L. sans dissipation

- Continuité de v_n
- Source vibroacoustique
- Pas de relation tangentielle

Limites physique

- Mouvement transverse de la structure
- Adiabaticité impossible sur la paroi
- Lien visqueux entre solide et fluide

Importance pratique

- Principale dissipation en champ clos
- Evite les "infinis" (résonances, etc)
- Perturbation de champ acoustique
- Ordre de grandeurs très faibles

Calculs approximatifs suffisants

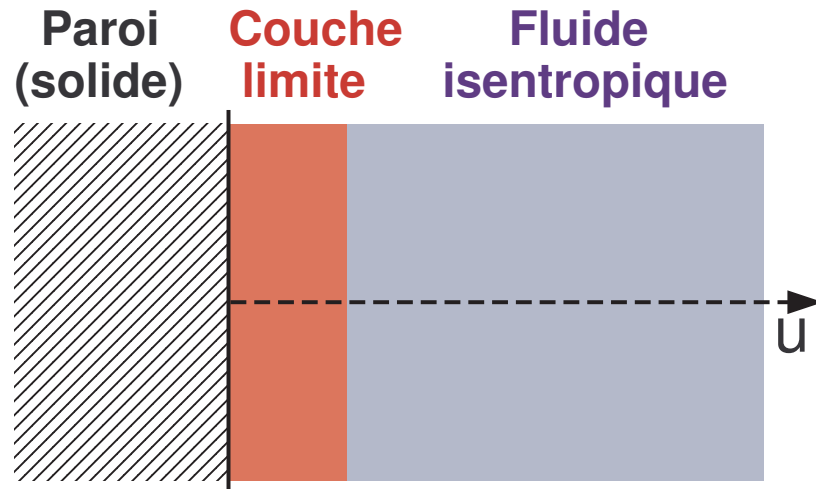
Forme "équations d'ondes" (loin des sources externes)

Trois phénomènes : acoustique, visqueux, thermique

Opérateurs de propagation/diffusion

Trois grandeurs : $\{p, \vec{v}, T\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2 - \Delta - \frac{\ell_{vh}}{c_0} \Delta \partial_t \right] p = 0 \\ \left[\frac{1}{c_0} \partial_t - \ell_h \Delta \right] T = \frac{\gamma-1}{\gamma \hat{\beta} c_0} \partial_t P \\ \left[\frac{1}{c_0} \partial_t - \ell'_v \vec{\Delta} \right] \vec{v}_v = \vec{0} \end{array} \right.$$



Couche limite :

- Zone de diffusion viscothermique
- Gradients normaux (selon \vec{u})
- Epaisseur de l'ordre de l_{vh}
- Liée à la différence de milieux

Propriétés de la paroi (solide) :

Conduction thermique élevée (isotherme)

Parfaitement rigide : $\vec{v}(u=0) = \vec{0}$

Localement plane (échelle = l_{vh})

Champ acoustique incident :

Compression locale

Variation de température associée

Conduction thermique :

Paroi isotherme (c/c thermique)

Flux de chaleur "réfléchi"

Viscosité :

Cisaillement près de la paroi

Annulation de la vitesse tangente

Création de vitesse tourbillonnaire

Diffusion de la vitesse rotationnelle

Résultante acoustique :

Relation entre composantes de vitesse

Expression reliant p et v_n

Champ acoustique "incident" isentropique :

$$[\Delta + k_a^2]p = 0$$

$$\vec{\mathbf{v}}_a = \frac{-1}{j\omega\rho_0} \vec{\nabla} p$$

$$T_a = \frac{\gamma-1}{\gamma\hat{\beta}} p$$

Paroi isotherme (c/c thermique) :

$$T = T_a + T_e = 0 \text{ en } u = 0$$

Diffusion thermique de T_e

Vitesse de diffusion $\vec{\mathbf{v}}_e$

Composante normale dominante :

$$\Delta \approx \partial_{uu}^2$$

$$\text{Soit } T_e \approx -T_a e^{-jk_e u}$$

$$\text{Vitesse "entropique" } v_e \approx \frac{\gamma\hat{\beta}}{\rho_0 c_0} \ell_h \vec{\nabla} T_e \approx \text{selon } \vec{\mathbf{u}}$$

Vitesses sur la paroi :

$$\vec{v}_a = \frac{-1}{j\omega\rho_0} \vec{\nabla} p$$

$$v_e \approx -jk_e \frac{(\gamma-1)\ell_h}{\rho_0 c_0} p$$

Paroi rigide + viscosité :

$$\vec{v} = \vec{0} \text{ or } (\vec{v}_a + \vec{v}_e) \neq \vec{0}$$

Réaction correspondant à \vec{v}_v :

$$\vec{v}_a + \vec{v}_e + \vec{v}_v = \vec{0}$$

Séparation en deux composantes :

$$v_{aN} - jk_e \frac{(\gamma-1)\ell_h}{\rho_0 c_0} p + v_{vN} = 0$$

$$\vec{v}_{aT} + \vec{v}_{vT} = \vec{0}$$

Vitesse \vec{v}_v indivergente :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_v = \partial_N v_{vN} + \vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_{vT} = 0$$

Diffusion de $\vec{v}_v \approx$ selon \vec{u}

$$\text{D'où } \vec{\nabla}_T \cdot \vec{v}_{vT} + jk_v v_{vN} = 0$$

Vitesse acoustique modifiée par v_{vN} :

$$v_{aN} - jk_e \frac{(\gamma-1)\ell_h}{\rho_0 c_0} p + v_{vN} = 0$$

$$\vec{\nabla}_{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{aT}} - jk_v v_{vN} = 0$$

Relation entre p et $\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{a}}$:

$$v_{aN} - jk_e \frac{(\gamma-1)\ell_h}{\rho_0 c_0} p + \frac{1}{jk_v} \vec{\nabla}_{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{aT}} = 0$$

$$\text{Onde plane : } \vec{\nabla}_{\mathbf{T}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{aT}} \approx \frac{k^2}{j\omega\rho_0} \sin^2 \theta p$$

$$\text{Ainsi : } v_{aN} - jk_e \frac{(\gamma-1)\ell_h}{\rho_0 c_0} p - \frac{\omega}{\rho_0 c_0^2 k_v} \sin^2 \theta p = 0$$

Similaire à une condition mixte $(\partial_n + jk\varepsilon) p = 0$

Admittance "équivalente" ε dépendant de θ (L. Cremer, 1948)

$$\varepsilon = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega}{2c_0}} [(\gamma - 1)\sqrt{\ell_h} + \sin^2 \theta \sqrt{\ell'_v}] \frac{1}{\rho_0 c_0}$$

Admittance équivalente :

Diffusion locale : $\ell_{vh} \ll \lambda$

Paroi "plane" : $R \gg \lambda$

Onde plane (décomposition)

Cavités (volumes compacts) :

Admittance différente par mode

Calcul par perturbation

Principale cause d'absorption

Entrefers, tubes :

Diffusion entre parois proches

Géométrie éventuellement complexe

Approximations spécifiques

Modèles dédiés utilisant des hypothèses similaires

Propagation isentropique :

Pression et vitesse uniformes / section S

Débit acoustique $u = Sv$

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \partial_t p + \partial_z v_z & = 0 \\ \rho_0 \partial_t v_z + \partial_z p & = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_z p & = -Z u \\ \partial_z u & = -Y p \end{cases}$$

Décomposition des deux phénomènes de propagation :

Inertie via $Z = \frac{j\omega\rho_0}{S}$

Elasticité via $Y = \frac{j\omega S}{\rho_0 c_0^2}$

Découplage des deux phénomènes de dissipation :

Viscosité prise en compte dans Z_v

Conduction prise en compte dans Y_e

Conservation (Navier-Stokes) :

Linéarisée, en coordonnées cylindriques

Pas de viscosité de volume ($\eta = 0$)

Δv_z essentiellement radial (diffusion)

$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \approx$ composante axiale

Pression p restant uniforme sur S

$$\text{Alors } \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v_z) + k_v^2 v_z = \frac{1}{\mu} \partial_z p$$

Expression de v_z :

$$\text{Solution générale } v_z = A J_0(k_v r) + B N_0(k_v r) + \frac{1}{\mu k_v^2} \partial_z p$$

v_z finie en $r = 0$ et $v_z = 0$ en $r = R$

Intégration sur S pour obtenir u :

$$u = -\frac{S}{j\omega\rho_0} \left[1 - \frac{2}{k_v R} \frac{J_1(k_v R)}{J_0(k_v R)} \right] \partial_z p = -\frac{1}{Z_v} \partial_z p$$

Diffusion thermique :

Pression p restant uniforme sur S

$$[\Delta + k_e^2] T = -j\omega \frac{\gamma-1}{\gamma\hat{\beta}} \frac{\rho_0 c_p}{\kappa} p$$

Donc ΔT essentiellement radial (diffusion)

Linéarisée, en coordonnées cylindriques

T finie en $r = 0$ et $T = 0$ en $r = R$

$$\text{Alors } T = \frac{\gamma-1}{\gamma\hat{\beta}} \frac{J_0(k_e r)}{J_0(k_e R)} p$$

Conservation masse + état :

$$j\omega\rho + \rho_0\partial_z v_z = 0$$

$$\rho = \rho_0\chi_T p - \rho_0\beta T$$

Intégration sur S pour obtenir $\partial_z u$:

$$\partial_z u = -\frac{j\omega S}{\rho_0 c_0^2} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{2}{k_e R} \frac{J_1(k_e r)}{J_0(k_e r)} \right] p = -Y_e p$$

Découplage effets \Rightarrow paramètres modifiés (complexes) :

$$\begin{cases} Z_v &= \frac{j\omega\rho_0^*}{S} \\ Y_e &= j\omega S\chi_s^* \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_0^* &= \rho_0 \left[1 - \frac{2}{k_v R} \frac{J_1(k_v R)}{J_0(k_v R)}\right]^{-1} \\ \chi_s^* &= \chi_s \left[1 + (\gamma - 1) \frac{2}{k_e R} \frac{J_1(k_e r)}{J_0(k_e r)}\right] \end{cases}$$

Approximation pour une onde plane / tuyau cylindrique (1949) :

Absorption à proximité des parois

Basses fréquences : $k\ell_v/h \ll 1$

Tuyau "assez large" : $R \gg \ell_v/h$

Développements selon la valeur de $k_{v/e}R$

Tubes "larges" : $k_{v/e}R \rightarrow \infty$

Section S principalement isentropique

v_z croît linéairement près de la paroi

Dispersion aux B.F. : c croît avec ω puis $\rightarrow c_0$

Amortissement croît en $\sqrt{\omega}/R$

Tubes "capillaires" : $k_{v/e}R \rightarrow 0$

Phénomènes dissipatifs dans toute la section

Ecoulement quadratique "de Poiseuille"

Transformation isotherme

Equation de diffusion (absorption, dispersion)

Sinon ... calcul de Z_v et Y_e en fonction de $k_{v/e}R$ (rayon ou ω)

Modèle empirique (Delany-Bazley-Miki) :

Compilation de nombreuses mesures (fibres)

Loi polynômiale simple en f/σ

Prolongations du modèle de tube :

Squelette rigide à pores ouverts

Tortuosité : pore non cylindrique

Tendances limites BF/HF

Expressions / paramètres ρ^* et χ^*

Poroélastiques (modèle de Biot, ...) :

Squelette = "solide" (2 ondes)

Couplage interne fluide/solide

Phénomènes structurels (y.c. dissipation)

Même phénomènes de base, meilleure description \Rightarrow plus de paramètres !

Questions ?