Université d'Aix-Marseille
Semestre 1

Licence de Mathématiques
2014-2015

Introduction à l'analyse

Partiel 1 – 17 Octobre 2014

Calculette et documents non autorisés — Durée : 2 heures

Exercice 1

1. Donner les définitions d'une application injective et d'une application surjective.

On considère la fonction $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2-x$.

2. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R},\ f(x)>-1$.
4. En déduire que f est ni injective ni surjective.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble $A=\{x\in\mathbb{R}; |3x+6|+|x-2|\leqslant 8\}$ en termes d'intervalles.

Exercice 3

1. Soient P et Q deux assertions. Ecrire la négation, la réciproque et la contraposée de l'assertion $P\Rightarrow Q$.

2. Démontrer l'assertion suivante en utilisant sa contraposée :

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall y\in\mathbb{R}, x\neq y\Rightarrow (x+1)(y-1)\neq(x-1)(y+1).$$

3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application. Considérons l'assertion suivante :

$$(S)\ :\ \exists m\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geqslant 0\Rightarrow x\leqslant m.$$

Ecrire la négation de cette assertion. Donner l'exemple d'une application f qui vérifie l'assertion (S) et l'exemple d'une application f qui ne vérifie pas (S).

Exercice 4

Soient $B=\{a,b\}$ et $A=\mathcal{P}(B)$. Enumérer tous les éléments de l'ensemble A. Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
1. $\emptyset\in\mathcal{P}(A)$ et $\{\emptyset\}\in\mathcal{P}(A)$.
2. $\{\{a,b\}\}\subset\mathcal{P}(A)$.
3. $\{\{a\}\}\in\mathcal{P}(A)$.

Exercice 5

Soient X un ensemble et $f\ :X\to X$ une application. Si $A\subset X$, on dénote par $\overline{A}$ le complémentaire de A dans X.
1. Montrer que si $A\subset B\subset X$ alors $A\cap\overline{B}=\emptyset$.
2. Soit $A\subset X$. Montrer que $A\subset f^{-1}(f(A))$, puis en déduire que $A\cap\overline{f^{-1}(f(A))}=\emptyset$.