

Introduction à l'analyse

Partiel 1 – 16 Octobre 2015

Calculatrice et documents non autorisés

Durée : 2 heures

EXERCICE 1

Questions de cours

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A une partie de E et B une partie de F .

1. Rappeler la définition de l'image de A par f .
2. Rappeler la définition de l'image réciproque de B par f .
3. Ecrire en langage mathématique l'assertion P : « f est injective ».
4. Ecrire en langage mathématique l'assertion Q : « f est surjective ».

EXERCICE 2

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. On considère l'assertion (A) suivante :

$$(A) : (\exists m \in \mathbb{R}), (\forall x \in \mathbb{R}), (x > m \Rightarrow f(x) > m).$$

1. Ecrire la négation de l'assertion (A) .
2. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = -x$ ne vérifie pas (A) .
3. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = x$ vérifie (A) .

EXERCICE 3

Soient (X) et (Y) les assertions suivantes :

$$(X) : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (y > x \text{ et } \cos(y) > \cos(x)).$$
$$(Y) : \left(\forall t \in \mathbb{R}, t < \frac{1}{5} \right) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, \left(z > 5 \text{ et } \frac{1}{z} < t \right).$$

1. Donner la négation de (X) puis la négation de (Y) .
2. Donner la réciproque puis la contraposée de (Y) .
3. Montrer que l'assertion (X) est fausse puis que l'assertion (Y) est fausse.

EXERCICE 4

Soient A, B et C les trois ensembles suivants :

$$A = \{x \in \mathbb{R}; |3x + 1| < |x + 3|\}, B = \{x \in \mathbb{R}; |2x - 3| > 2\}, \text{ et } C = \{x \in \mathbb{R}; x \notin A\}.$$

Exprimer en termes d'intervalles les ensembles $A, B, C, A \cap B$ et $B \cup C$.

EXERCICE 5

Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer l'ensemble $f(\{2, \frac{1}{2}\})$.
3. Démontrer que pour tout réel x non nul, $f(\frac{1}{x}) = f(x)$.
4. L'application f est-elle injective ?
5. Déterminer l'ensemble $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$.
6. Démontrer que pour tout réel x , on a $-1 \leq f(x) \leq 1$.
7. L'application f est-elle surjective ?